

תומבי

1. נתונים 20 מספרים טבעיים שונים שקטנים מ-70. הוכיחו כי מבין הפרשים של זוגות מספרים נתונים יש לפחות ארבעה הפרשים זהים.

2. הראו שמבין כל 39 מספרים עוקבים יש מספר שסכום ספרותיו מתחלק ב-11.

3. הוכיחו כי מבין המספרים $0, 1, 2, \dots, 3^k - 1$ ניתן לבחור 2^k כך שאף מספר שבחרנו לא יהיה שווה לממוצע החשבוני של שני מספרים שנבחרו?

4. הראו שאפשר לחלק את המחלקים של $100!$ לשתי קבוצות באותו גודל כך שמכפלת המספרים בשתי הקבוצות זהה.

5. איילה וברוזה משחקים משחק. ברוזה כותב n מספרים שלמים על הלוח, לא כולם שווים. במהלך של לוטרה, הלוטרה מוחקת שני מספרים מהלוח וכותבת את

הממוצע שלהם. איילה מבצעת $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ מהלכים ולאחר מכן ברוזה מבצע מהלכים עד שנשארים שני מספרים. הראו שאיילה יכולה לגרום לכך ששני המספרים שנשארו יהיו שונים.

6. נתונים d_1, \dots, d_9 שלמים שונים. נתבונן בפולינום

$$P(x) = (x + d_1) \cdot \dots \cdot (x + d_9)$$

הוכיחו כי קיים שלם N כך שלכל שלם $N \leq x$ המספר $P(x)$ מתחלק בראשוני שגדול מ-20.

7. נתונה סדרה של שלמים חיוביים שסכומם 2019. ידוע שכל המספרים בסדרה שונים מ-40, וגם סכומה של כל קבוצת מספרים רצופה בסדרה שונה מ-40. מהי הכמות הגדולה ביותר של מספרים שיכולים להיות בסדרה?

8. נתון מספר טבעי N . הוכיחו כי קיימת כפולה של N שסכום ספרותיה אי-זוגי.

9. א. לכל ראשוני p נבנה גרף G_p שקודקודיו מתאימים ל- $\{1, \dots, p\}$ ושני קודקודים $m \neq n$ מחוברים בקשת אם ורק אם $(m^2 - n + 1)(n^2 - m + 1) \equiv p \pmod{p}$. הוכיחו כי G_p לא קשיר עבור אינסוף p -ים שונים.

ב. הוכיחו כי יש אינסוף p -ים עבורם ב- G_p יש רכיב קשירות מגודל 2.

10. במעגל רשומים $n \geq 2$ מספרים שלמים שסכומם לא מתחלק ב- n . מצאו את כל ה- n -ים עבורם ניתן למצוא נקודה על המעגל כך שכל הקשתות שמתחילות בנקודה זו והולכות עם כיוון השעון עוברות על מספרים שסכומם לא מתחלק ב- n .

11. קבוצה S של מספרים שלמים תקרא שורשנית אם לכל שלם חיובי n ולכל $a_0, a_1, \dots, a_n \in S$, כל השורשים השלמים של הפולינום $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ גם שייכים ל- S . מצאו את כל הקבוצות השורשניות אשר מכילות את כל המספרים מהצורה $2^a - 2^b$ עבור a, b שלמים חיוביים.