

* *

1. * היא פעולה בינארית אסוציאטיבית על השלמים. נתון ש-* לא קומוטטיבית בכל נקודה, כלומר ש- $x * y \neq y * x \Rightarrow x \neq y$. הוכיחו כי $x * (y * z) = x * z$.

2. תהי * פעולה בינארית על \mathbb{R}^* (ממשיים בלי 0) כך ש-

$$(ab) * c = (a * c) \cdot (b * c), \quad c * (ab) = (c * a) \cdot (c * b)$$

$$a * b > 0 \text{ ו-} a * (1 - a) = 1 \text{ לכל } a, b.$$

$$\text{הראו כי } a * a = a * (-a) = 1 \text{ ו-} a * b = \frac{1}{b * a}.$$

3. תהיה * פעולה בינארית אסוציאטיבית וקומוטטיבית על הקטע $[0,1]$ המקיימת ש- $x * 1 = x$ ו- $(z \cdot x) * (z \cdot y) = z^k \cdot (x * y)$ כאשר k ממשי חיובי. מצאו את כל הערכים האפשריים של k עבורם קיימת פעולה המקיימת את התנאים.

4. מצאו את כל הפעולות הבינאריות על הממשיים החיוביים עבורן

$$x * (y * z) = (x * y) \cdot z$$

$$\text{ו-} x * x \geq 1 \text{ לכל } x \geq 1.$$

5. מצאו את כל הפעולות הבינאריות * כך שלכל x, y שלמים מתקיים ש-

$$x * y = \frac{x * (y - 1) + (x - 1) * y}{2}$$

$$\text{ו-} 0 \leq x * y \leq 1.$$

6. תהיה * פעולה בינארית אסוציאטיבית על השלמים החיוביים, ידוע ש-* חסומה, כלומר

$$\text{שקיים } C \text{ עבורו לכל } x, y \text{ שלמים חיוביים } x * y < C.$$

הוכיחו שקיים אידמפוטנט ביחס ל-*, כלומר קיים x כך ש- $x * x = x$.

7. מצאו את כל הפעולות הבינאריות * על הממשיים החיוביים המקיימות את שני התנאים

$$\text{הבאים: } (x * y) * z = x^2 y^2 \cdot (x * z) \text{ וגם } x * (1 + x * y) \geq x^2 + xy \cdot (x * x).$$

8. מצאו את כל הפעולות הבינאריות * על הממשיים המקיימות ש-

$$(x * z) * (z * y) = (x * y) + z$$

9. מצאו את כל הפעולות הבינאריות קומוטטיביות ואסוציאטיביות * על השלמים המקיימות

$$\text{ש-} 0 * 0 = 0 \text{ ו-} (x + z) * (y + z) = (x * y) + z.$$

בתאבון!