

*

* היא פעולה בינארית על קבוצת מספרים.

פעולה בינארית נקראת אסוציאטיבית אם היא מקיימת את הנוסחה:

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

פעולה בינארית נקראת קומוטטיבית אם היא מקיימת את הנוסחה:

$$x * y = y * x$$

1. * היא פעולה בינארית אסוציאטיבית על הממשיים. ידוע שקיים ממשי e כך שלכל x ממשי מתקיים ש- $x * e = e * x = x$. בנוסף ידוע ש- $x * x = e$. הוכיחו כי הפעולה קומוטטיבית.

2. * היא פעולה בינארית על השלמים המקיימת את התנאים הבאים:

א. $x * (y * z) = y * (z * x)$.

ב. אפשר לצמצם משמאל, כלומר $x * y = x * z$ גורר $y = z$.

ג. אפשר לצמצם מימין, כלומר $y * x = z * x$ גורר $y = z$.

הוכיחו ש-* קומוטטיבית ואסוציאטיבית.

3. מצאו את כל הפעולות הבינאריות * על הממשיים עבורן $x * x = 0$ לכל x ולכל x, y, z ממשיים מתקיים: $x * (y * z) = x * z - y$.

4. מצאו את כל הפעולות הבינאריות * על הממשיים כך ש-* אסוציאטיבית, אנטי-קומוטטיבית, כלומר ש- $x * y = -(y * x)$ ולכל מספר ממשי x קיימים ממשיים a, b כך ש- $x = a * b$.

5. מצאו את כל הפעולות הבינאריות * על השלמים החיוביים כך ש- $n * n \geq n$ ולכל n, m, k שלמים חיוביים מתקיים: $\gcd(n, m) * k = \gcd(n, k * m)$.

8. מצאו את כל הפעולות הבינאריות * על המספרים הממשיים המקיימות את הנוסחה

$$x * (y * z) = x + y + z$$

6. מצאו את כל הפעולות הבינאריות * על הממשיים החיוביים המקיימות ש- $x * x = 1$ ו- $x * (y * z) = (x * y) \cdot z$.

7. * היא פעולה בינארית על השלמים המקיימת את שני הנאים הבאים:

א. $x * (x * y) = y$ ב. $(x * y) * y = x$. הוכיחו ש-* קומוטטיבית.

9. * היא פעולה בינארית אסוציאטיבית על השלמים. נתון ש-* לא קומוטטיבית בכל נקודה, כלומר ש- $x * y \neq y * x \Rightarrow x \neq y$.

הוכיחו כי $x * (y * z) = x * z$.

10. תהי * פעולה בינארית על \mathbb{R}^* (ממשיים בלי 0) כך ש-

$$(ab) * c = (a * c) \cdot (b * c), \quad c * (ab) = (c * a) \cdot (c * b)$$

ו- $a * (1 - a) = 1$ ו- $a * b > 0$ לכל a, b . הראו כי $a * a = a * (-a) = 1$ ו- $a * b = \frac{1}{b * a}$.

בתאבון!