הריבוע המתמטי

אלגברה

1. יהי n שלם חיובי. הראו כי קיימים $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ממשיים חיוביים עבורם לכל בחירה של סימנים לפולינום $\pm a_n x^n \pm a_{n-1} x^{n-1} \pm \cdots \pm a_1 x \pm a_0$ יהיו n שורשים ממשיים שונים.

2. מצאו את כל הפולינומים שהמקדמים שלהם הם תמורה של $n, \ldots, 1$ וכל השורשים שלהם רציונליים.

3. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ עבורן לכל $x + y + z = 0$ ממשיים מתקיים:

$$f(x)^3 + f(y^3) + f(z)^3 = 3xyz.$$

4. על הלוח רשום מספר שלם חיובי x. בכל שלב ניתן להוסיף למספר הרשום על הלוח 1 או להעלות אותו בריבוע, אבל אסור להוסיף 1 פעמיים ברצף. כעבור זמן מה על הלוח הופיע המספר $y > x^n + 1$. הראו כי $y > x^n + x - 1$.

גיאומטריה

1. נתון משולש משוכלל ABC, על הצלעות AB, AC נבחרו נקודות D, E בהתאמה כך ש-$DE||BC$. נסמן ב-F את אמצע BE וב-O את מרכז המשולש המשוכלל ADE. חשבו את זוויות המשולש CFO.

2. המעגל החסום מחוץ לקודקוד A במשולש ABC משיק לצלע BC בנקודה D, מרכז המעגל הזה יסומן I_A. נסמן ב-X את החיתוך של חוצה הזווית של $\angle BDI_A$ עם BI_A. באופן דומה נסמן ב-Y את החיתוך של חוצה הזווית של $\angle CDI_A$ עם CI_A. הישרים DI_A ו-XY נחתכים בנקודה P. הראו כי XY הוא חוצה הזווית של $\angle API_A$.

3. H הוא מפגש הגבהים במשולש ABC ו-M היא אמצע הצלע BC. נסמן ב-D את החיתוך של HM עם חוצה הזווית של $\angle BAC$. המעגל עם קוטר AD נחתך עם הצלעות AB, AC בנקודות X, Y. הראו כי הישר XY עובר ב-H.

4. יהי I_A מרכז המעגל החסום מחוץ לקודקוד A במשולש ABC. יהי מעגל ω העובר בנקודות A, I_A ונחתך עם הישרים AB, AC בנקודות X, Y בהתאמה. יהיו S, T נקודות על הקטעים I_AB, I_AC בהתאמה כך ש-$\angle AXI_A = \angle BTI_A$ ו-$\angle AYI_A = \angle CSI_A$. הישרים BT, CS נחתכים בנקודה K. הראו כי הישרים TS, XY, KI_A נחתכים בנקודה אחת.

קומבינטוריקה

1. נתון גרף G שבו מתקיימים שני התנאים הבאים:

- לכל שני קודקודים שכנים, אין שכנים משותפים.
- לכל שני קודקודים לא שכנים, יש בדיוק שני שכנים משותפים.

הראו כי הגרף רגולרי.

2. נתונה ערימה עם 2024^{2024} אבנים. בכל מהלך ניתן לבחור ערימה ולחלק אותה לשתי ערימות כך שההפרש בין כמויות האבנים ביניהן זו חזקה אי-שלילית של 2. כעבור מספר מהלכים התברר שבכל ערימה כמות האבנים היא חזקה אי-שלילית של 2. הראו כי כמות המהלכים שבוצעו עד לרגע זה חייבת להיות זוגית.

3. נתונות קבוצות A, B, C של מספרים ממשיים. הראו כי

$$|A+B+C|^2 \leq |A+B| \cdot |B+C| \cdot |C+A|\,.$$

4. נתבונן ב-26^{26} המילים מאורך 26 באלפבית הלטיני. נגדיר את *המשקל* של מילה להיות $\frac{1}{k+1}$ כאשר k זה כמות האותיות שלא מופיעות במילה. הראו כי סכום המשקלים של כל המילים הוא 3^{75}.

תורת המספרים

1. מצאו את כל המספרים הראשוניים p עבורם קיים שלם חיובי n כך שהמספר $2^n p^2 + 1$ הוא ריבוע שלם.

2. נתונים m, k שלמים חיוביים. הראו כי קיימים אינסוף מספרים ראשוניים המחלקים את איברי הסדרה: $a_n = m \cdot 2025^n + k \cdot 2024^n$.

3. מספר n נקרא חמוד אם קיימים $k, d_1, \dots, d_k$ שלמים חיוביים כך ש-$n = d_1 \cdot \ldots \cdot d_k$ ולכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים ש-$d_i^2 | n + d_i$.

א. הראו שיש אינסוף מספרים חמודים.

ב. הראו שריבוע של שלם שגדול מ-1 לא יכול להיות חמוד.

4. מצאו את כל הנקודות P על ציר ה-x כך שהמרחקים מ-P לקודקודי הריבוע $(\pm 1, \pm 1)$, רציונליים.

בתאבון!