רמזי

א.1. למסיבה הגיעו שישה אנשים. כל זוג אנשים הם או חברים, או לא חברים. הוכיחו שאו שיש שלושה אנשים שכולם חברים זה של זה, או שיש שלושה אנשים שאף אחד לא חבר של אף אחד.

א.2. האם הטענה לעיל תקפה גם לחמישה אנשים?

א.3. הוכיחו את **משפט רמזי**: לכל שני מספרים טבעיים k ו-l, קיים מספר טבעי r, כך שכל גרף בן r קודקודים בהכרח מכיל תת גרף מלא בן k קודקודים, או תת גרף ריק בן l קודקודים. (כלומר קיימים k קודקודים שכולם מחוברים אחד לשני בקשתות, או שקיימים l קודקודים שאף אחד מהם אינו מחובר לאף אחד אחר בקשת).

הערה: נסמן את ה-r המינימלי שמקיים זאת $R(k,l)$.

א.4. הראו כי $17 < R(4,4) \le 20$.

ב.1. הוכיחו כי לכל $n_1, n_2, ..., n_k$ מספרים טבעיים, קיים מספר טבעי r, כך שבכל גרף בן r קודקודים שקשתותיו נצבעו ב-k הצבעים $1,2,...,k$ קיים צבע i כך שקיים תת-גרף בן n_i קודקודים שכל קשתותיו בצבע i.

ב.2. מבין n אנשים, כל שניים מתכתבים באחת מבין 3 שפות. מצאו את ה-n המינימאלי כך שבהכרח יש 3 אנשים שמתכתבים באותה שפה.

ב.3. עבור n,k טבעיים נסמן ב-$R_k(n)$ את ה-r המינימלי, כך שבכל גרף מלא בן r קודקודים שקשתותיו נצבעו ב-k צבעים, קיים צבע כך שקיים תת-גרף בן n קודקודים שכל קשתותיו בצבע הזה. הוכיחו כי $R_{k+m}(n) - 1 \ge (R_k(n) - 1) \cdot (R_m(n) - 1)$.

ב.4. כידוע, גרף הוא זוג של שתי קבוצות - קבוצת קודקודים וקבוצת קשתות החלקית לקבוצת כל הזוגות האפשריים בין שני קודקודים. ניתן להכליל הגדרה זו ל"היפר-גרף" באופן הבא: **היפר-גרף מסדר** d הוא זוג של שתי קבוצות – קבוצת קודקודים, וקבוצת היפר-קשתות מסדר d, החלקית לקבוצת כל ה-d-יות האפשריות בין d קודקודים.

כלומר הכללנו את הקשת, שמסורתית מחברת בין שני קודקודים, להיפר-קשת שמחברת בין d קודקודים. (למשל היפר-גרף מסדר 2 הוא גרף רגיל)

הוכח כי לכל n m, ו-d טבעיים, קיים r טבעי, כך שלכל היפר-גרף מסדר d בן r קודקודים קיים תת היפר-גרף מלא בן n קודקודים או תת היפר-גרף ריק בן m קודקודים.

ג.1. בכנס 1978 נציגים מ-6 מדינות, ולכל אחד יש מספר סידורי מ-1 עד 1978. הוכיחו שעבור אחד הנציגים בכנס מספר סידורי שלו שווה לסכום של מספרים סידוריים של שני נציגים מאותה מדינה, או לפעמיים מספר סידורי של נציג אחר מאותה המדינה.

ג.2. על מישור סומנו 70 נקודות, אף 3 לא על ישר אחד. ליאורה וניר משחקים בתורות: ליאורה בתור שלה מעבירה קטע כחול שמחבר שתי נקודות מסומנות, וניר בתורו מעביר קטע אדום (אסור לחבר זוגות נקודות שכבר חוברו). על מנת לנצח, צריך שיהיו 5 נקודות שכל 10 הקטעים שמחברים אותם הם בצבע של השחקן המנצח. האם יש אסטרטגיה מנצחת לאחד השחקנים? אם כן, למי?

ג.3. הוכיחו שלכל n קיים P, כך שלכל ראשוני מספיק גדול $p \geq P$, למשוואה $x^n + y^n = z^n \left(\mathrm{mod}\, p\right)$ יש פתרון לא טריוויאלי (עם $p \nmid x, y, z$).

ג.4. הוכיחו שקיימת קבוצה אינסופית R של טבעיים כך שלכל $x, y \in R$, יש למספר $x + y$ כמות זוגית של מחלקים ראשוניים שונים.

ד.1. הוכיחו שמכל חמישיית נקודות במישור שאף שלוש מהן אינן נמצאות על ישר אחד, ניתן לבחור ארבע נקודות היוצרות ביניהן מרובע קמור.

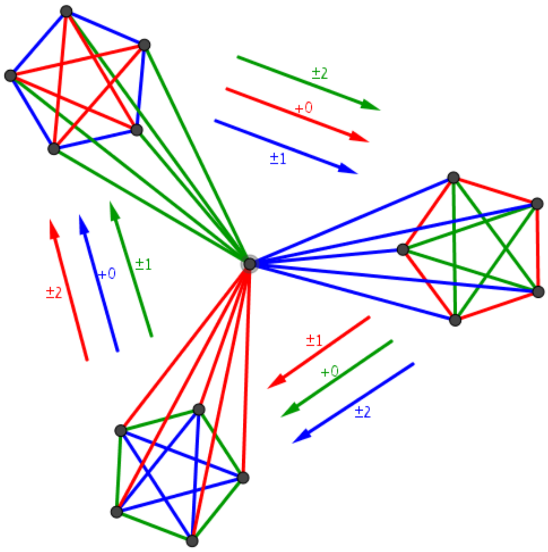
ד.2. הוכיחו שאם כל 4 קודקודים של מצולע יוצרים מצולע קמור, אז גם המצולע הוא קמור.

ד.3. הוכיחו את **משפט הסוף הטוב**: לכל n טבעי, קיים r טבעי, כך שמכל r נקודות במישור שאף שלוש מהן אינן נמצאות על ישר אחד, קיימות n נקודות היוצרות ביניהן מצולע קמור.

בתיאבון!

$R(k,l)=$ מס' מינימלי של קודקודים שצריך בגרף כדי להבטיח, שבצביעה בשני צבעים תהיה k-קליקה מהצבע הראשון או l-קליקה מהצבע השני.

$R_n(k)=$ מס' מינימלי של קודקודים שצריך בגרף כדי להבטיח, שבצביעה ב n צבעים תהיה k-קליקה מאחד הצבעים.



חסמים:

$$R(k,\ell)\le\binom{k+\ell-2}{k-1}$$

$$R_n(3)\le\lceil e\cdot n!\rceil$$

$$R_{2n}(3)>5^n, R_{3n}(3)>16^n$$

$R(n,n)\ge\sqrt{2}^n$ עבור $n\ge 2$.

k

$R(k,l)$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	**6**	9	14	18	23	28	36	40–42
4	1	4	9	**18**	25	36–41	49–61	59–84	73–115	92–149
5	1	5	14	25	**43–48**	58–87	80–143	101–216	133–316	149–442
6	1	6	18	36–41	58–87	**102–165**	115–298	134–495	183–780	204–1171
7	1	7	23	49–61	80–143	115–298	**205–540**	217–1031	252–1713	292–2826
8	1	8	28	59–84	101–216	134–495	217–1031	**282–1870**	329–3583	343–6090
9	1	9	36	73–115	133–316	183–780	252–1713	329–3583	**565–6588**	581–12677
10	1	10	40–42	92–149	149–442	204–1171	292–2826	343–6090	581–12677	**798–23556**