

מספרים צבעוניים

בתרגיל זה מספרים טבעיים הם מספרים שלמים חיוביים.

1. מצאו את כל הדרכים לצבוע את המספרים הטבעיים בכחול וצהוב כך שמתקיים התנאי הבא: אם n נצבע בצבע A אז סכום של כל n מספרים (לא בהכרח שונים) מצבע A חייב להיות צבוע בצבע A .

2. המישור נצבע ב- n צבעים כך שכל ישר עובר בנקודות משני צבעים לכל היותר. מצאו את ה- n הגדול ביותר עבורו זה אפשרי.

3. האם ניתן לצבוע את הטבעיים בכחול וצהוב כך שסכום של כל שני מספרים שונים מצבע זהה, יהיה שונה מחזקת 2?

4. כל הנקודות השלמות במישור נצבעו בכחול וצהוב. הוכיחו כי ניתן לבחור צבע כך שלכל n , קיים משולש עם קודקודים שלמים שצבועים בצבע הנבחר ושטח המשולש הוא n .

5. מצאו את כל הדרכים לצבוע את המספרים הטבעיים בכחול וצהוב כך שמתקיים התנאי הבא: סכום של מספרים מצבעים שונים צבוע בכחול ואילו מכפלה של מספרים מצבעים שונים צבועה בצהוב.

6. המרחב התלת ממדי נצבע בשלושה צבעים. הוכיחו כי ניתן לבחור צבע כך שלכל n טבעי קיימות שתי נקודות מהצבע שנבחר, שהמרחק ביניהן הוא n .

7. כל המספרים הממשיים שגדולים מ-1 נצבעו בשני צבעים. הוכיחו כי ניתן למצוא a, b ממשיים כך שהמספרים $a + \frac{1}{b}$ ו- $b + \frac{1}{a}$ נצבעו בצבעים שונים.

8. המרחב התלת ממדי נצבע בחמישה צבעים, חמישתם מופיעים. הראו כי ניתן לבחור מישור שנוגע לפחות בארבע צבעים.

9. האם ניתן לצבוע את המספרים הממשיים החיוביים ב-10 צבעים כך שכל שני מספרים שהרישום העשרוני שלהם נבדל בספרה אחת בדיוק, יהיו צבועים בצבעים שונים?
הערה: הרישום העשרוני הוא אינסופי לשני הכיוונים, כלומר מתחיל עם אינסוף אפסים משמאל.

הערה נוספת: אסור לרשום את 1 בתור $0.999 \dots$.

10. האם קיימת צביעה של קבוצה S ב- k צבעים (כל הצבעים מופיעים) כך שלכל $1 - k$ מספרים מצבעים שונים מתקיים שסכומם צבוע בצבע השישי?

א. $S = \mathbb{N}, k = 3$. ב. $S = \mathbb{N}^3, k = 4$. ג. $S = \mathbb{N}, k = 6$.