

## קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. תהי  $M$  אמצע צלע  $BC$  במשולש  $ABC$ . הישר  $BC$  מחלק את המישור לשני חלקים; בחלק אחד נמצאת הנקודה  $A$  ובחלק האחר נמצאות נקודות  $X, Y$  המקיימות  $BX = MX$ ,  $CY = MY$  ו- $\angle BXM = 2\angle MAC$ ,  $\angle MYC = 2\angle BAM$ . הראו כי  $YX \perp AM$ .

2. נתונים שלמים חיוביים  $a, b, c, d$  כך ש- $d \geq b$  ומתקיים

$$ab - a - 2b = cd + c + 2d$$

הראו כי  $a + 2d$  פריק.

3. בארץ רחוקה מאוד יש מספר אי-זוגי של ערים שמחוברות על ידי כבישים, כך שמכל עיר אפשר להגיע באמצעות מספר מעברים לכל עיר אחרת. בכל עיר יש מספר גדול אבל לא אינסופי של מינקוינים. איילה מטיילת בארץ, כל פעם שהיא מגיעה לעיר מסוימת העיר צריכה להעביר במיידית מינקוין אחד לכל עיר אחרת. איילה רוצה לבצע טיול אינסופי, שזה דורש שבכל עיר יהיה מספיק כסף בכל ביקור שלה.

תת-קבוצה של ערים במדינה נקראת מפסטנת, אם אין בה ערים שמקושרות ישירות, וכמות הערים שמקושרות ישירות ללפחות אחת הערים בתת-קבוצה זאת היא קטנה או שווה לכמות הערים בתת-קבוצה עצמה. הראו שאם קיימת תת-קבוצה מפסטנת, אז הטיול האינסופי של איילה לא יתאפשר.

4. נתונים מספרים ממשיים  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  כך ש-

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2 = 1$$

נתונה קבוצה  $I \subset \{1, \dots, n\}$ . הוכיחו כי

$$\sum_{i \in I} (a_i^2 - b_i^2) \leq \sqrt{1 - \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2}$$

**בהצלחה!**

## קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. במשולש ABC הגבהים נפגשים בנקודה H. האנך לישר BH בנקודה H פוגש את AB בנקודה X; האנך לישר CH בנקודה H פוגש את AC בנקודה Y. המעגלים החוסמים של BHX ו-CHY נפגשים שנית בנקודה A'. באופן סימטרי להגדרה של A', מוגדרות הנקודות B' ו-C'. הראו כי הנקודות A', B', C' ו-H נמצאות על מעגל אחד.

2. נתונים מספרים ממשיים  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  כך ש-

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2 = 1$$

נתונה קבוצה  $I \subset \{1, \dots, n\}$ . הוכיחו כי

$$\sum_{i \in I} (a_i^2 - b_i^2) \leq \sqrt{1 - \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2}$$

3. בארץ רחוקה מאוד יש מספר אי-זוגי של ערים שמחוברות על ידי כבישים, כך שמכל עיר אפשר להגיע באמצעות מספר מעברים לכל עיר אחרת. בכל עיר יש מספר גדול אבל לא אינסופי של מינקוינים. מטיילת בארץ, כל פעם שהיא מגיעה לעיר מסוימת העיר צריכה להעביר במיידית מינקוין אחד לכל עיר אחרת. איילה רוצה לבצע טיול אינסופי, שזה דורש שבכל עיר יהיה מספיק כסף בכל ביקור שלה.

תת-קבוצה של ערים במדינה נקראת מפסטנת, אם אין בה ערים שמקושרות ישירות, וכמות הערים שמקושרות ישירות ללפחות אחת הערים בתת-קבוצה זאת היא קטנה או שווה לכמות הערים בתת-קבוצה עצמה.

הראו שאם קיימת תת-קבוצה מפסטנת, אז הטיול האינסופי של איילה לא יתאפשר; כמו כן הראו שאם אין אף תת-קבוצה מפסטנת, והערים בהתחלה מספיק עשירות, אז הטיול האינסופי של איילה יתאפשר.

**בהצלחה!**

אין להשתמש במחשבון

1. לדניאל אריחים בגודל  $1 \times 1$  בשני צבעים, כחול ולבן. יותם נותן לדניאל דפים עם ריבועים  $2 \times 2$  הצבועים בצבעים אלו. לאחר מכן דניאל מרצף את המישור עם האריחים שלו, כך שאין ריבוע  $2 \times 2$  עם אחת הדוגמאות שיותם נתן לדניאל (ניתן לסובב את הדפים, שכן הם ריבועים). המטרה של יותם היא שדניאל לא יוכל לרצף את המישור באופן חוקי, בלי שהצביעה תהיה מחזורית. מצאו את המספר המינימלי של דפים שיותם צריך להביא לדניאל כדי להשיג את מטרתו.

הערה: צביעה של המישור תקרא מחזורית אם יש מספרים שלמים  $m, n$ , כך שלכל  $x, y$ , הצבע בנקודה  $(x, y)$  זהה לצבע בנקודה  $(x + m, y)$  וגם לצבע בנקודה  $(x, y + n)$ .

2. מצאו את כל הפונקציות  $f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  עבורן לכל  $m, n, k$  שלמים אי-שליליים מתקיים:

$$f(n, m) \cdot f(m, k) = f(n, k) \cdot f(n - k, m - k)$$

וגם:

$$\sum_{i=0}^n f(n, i) = 2^n$$

3. מצאו את המינימום של

$$5\sqrt{2(1-x)} + \sqrt{169 - 120\sqrt{1-x^2}}$$

עבור  $x$  מספר ממשי בין 0 ל-1.

4. קונפיגורציה של 7 נקודות במרחב תקרא  $\alpha$ -הזוויה אם לכל זוג נקודות  $A, B$  קיימת נקודה  $C$  כך ש- $\angle ACB = \alpha$ . מצאו את כל הערכים האפשריים של  $\alpha$  כך שקיימת קונפיגורציה  $\alpha$ -הזוויה.

5. המספרים השלמים  $a, b, c, d$  מקיימים את התנאים הבאים:

$$a + c = f_{n+2}$$

$$b + d = f_{n+1}$$

$$ad \neq bc$$

הוכיחו כי  $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{f_{2n+1}} + \sqrt{f_{2n-1}}$

תזכורת:  $f_n$  זו סדרת פיבונאצ'י המוגדרת באופן הבא:  $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$

6. נתון משולש ABC, מרכז המעגל החסום במשולש יסומן ב-I ומרכז המעגל החוסם של המשולש יסומן ב-O. על המשכי הצלע BC מעבר ל-B ומעבר ל-C סומנו נקודות  $X_1$  ו- $X_2$  בהתאמה, על המשכי הצלע AC מעבר ל-C ומעבר ל-A סומנו נקודות  $Y_1$  ו- $Y_2$  בהתאמה, ועל המשכי הצלע AB מעבר ל-A ומעבר ל-B סומנו נקודות  $Z_1$  ו- $Z_2$  בהתאמה, כך ש-

$$Z_2B = BC = CY_1, \quad X_2C = CA = AZ_1, \quad Y_2A = AB = BX_1$$

הישרים  $X_1Y_2, Y_1Z_2, Z_1X_2$  יוצרים משולש שיקרא  $\Delta_1$ . הישרים  $X_1Z_2, Z_1Y_2, Y_1X_2$  יוצרים משולש שיקרא  $\Delta_2$ . הראו שהמשולשים  $\Delta_1$  ו- $\Delta_2$  פרספקטיביים דרך נקודה על הישר IO.

תזכורת: המשולשים ABC,  $A'B'C'$  יקראו פרספקטיביים אם הישרים  $AA', BB', CC'$  נפגשים בנקודה.

7. הראו שעבור מספרים חיוביים  $a, b, c, d$ , ומספר חיובי שלם  $n$  מתקיים

$$\frac{ab}{\sqrt[n]{a^2 + b^2}} + \frac{bc}{\sqrt[n]{b^2 + c^2}} + \frac{cd}{\sqrt[n]{c^2 + d^2}} + \frac{da}{\sqrt[n]{d^2 + a^2}} \geq \frac{(a+c)(b+d)}{\sqrt[n]{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ac - bd}}$$

8. יהי  $p$  ראשוני. כתלות ב- $p$ , מצאו את כמות המספרים  $x$  בקבוצה  $\{0, 1, \dots, p-1\}$  עבורם הביטוי

$$\sum_{i=1}^{p-1} x^i c_i$$

מתחלק ב- $p$ , כאשר  $c_i = \frac{\binom{2i}{i}}{i+1}$  הוא מספר קטלן ה- $i$ .

**בהצלחה!**

אין להשתמש במחשבון

1. על הלוח כתובים המספרים השלמים החיוביים. איילה וברווז משחקים משחק, איילה מתחילה. לרשותן  $N$  צבעים. כל לוטרה, בתורה, צובעת את המספר הקטן ביותר שטרם נצבע. אסור שמספרים  $a, b$  כך ש- $a$  מתחלק ב- $b$  יהיו צבועים באותו הצבע. לוטרה אשר לא מסוגלת לבצע מהלך – מפסידה. למי יש אסטרטגיה מנצחת?

2. האם כל פולינומים בעל מקדמים ממשיים  $P(x)$  ניתן להציג בצורה

$$P(x) = (Q_1(x))^5 + (Q_2(x))^5 + (Q_3(x))^5 + (Q_4(x))^5 + (Q_5(x))^5$$

כאשר  $Q_1(x), \dots, Q_5(x)$  הם פולינומים עם מקדמים ממשיים?

3. נתון משולש  $ABC$ . נסמן את אמצעי הצלעות  $AB$  ו- $AC$  ב- $M$  ו- $N$  בהתאמה. נתון שהקטע  $MN$  משיק למעגל החסום במשולש  $ABC$ . נסמן ב- $S$  את שטח משולש  $ABC$  וב- $r$  את רדיוס המעגל החסום במשולש  $ABC$ . הוכיחו כי  $S \geq 4\sqrt{2}r^2$ .

4. הראו כי לכל  $n$  טבעי  $\varphi(n^{43} + n^{30} + n^{26} + n^{17} + n^{13} + 1)$  מתחלק ב-1326.

**בהצלחה!**