

## קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. ג'ירפה וגמל צבעו את  $(n + 1)^2$  הצמתים של לוח  $n \times n$  באדום והתחילו לשחק בתורות, ג'ירפה מתחילה. בכל תור השחקן בוחר שלוש נקודות אדומות שלא נמצאות על ישר אחד ומצייר בכחול את שלושת הקטעים שמחברים אותן. שחקן שמצייר קטע כחול שנחתך עם קטע שצויר באחד מהמהלכים הקודמים, מפסיד. למי יש אסטרטגיה מנצחת?

הערה: שני קטעים נחתכים גם בקצוותיהם.

2. מצאו את כל הרביעיות של שלמים חיוביים  $a, b, c, n$  עבורן  $2^a + 2^b + 2^c = n!$

3. נתון טרפז  $ABCD$  שחוסם מעגל. אלכסוני הטרפז מחלקים אותו לארבעה משולשים. נסמן את רדיוסי המעגלים החסומים במשולשים אלו ב- $r_1, r_2, r_3, r_4$ , עם כיוון השעון. הראו שמתקיימת הנוסחה:

$$\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} = \frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_4}$$

4. מצאו את כל הפונקציות  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  עבורן לכל  $x, y$  ממשיים מתקיים ש-

$$f(xf(y) + yf(x) + 1) = xf(x) + yf(y)$$

**בהצלחה!**

## קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. יהי משולש  $ABC$  ונקודה  $D$  על  $BC$  כך ש- $AD$  חוצה את הזווית  $\angle BAC$ . המשיקים המשותפים החיצוניים של המעגלים  $BAD, CAD$  נחתכים בנקודה שתסומן  $A'$ . באופן דומה נגדיר את  $B', C'$ . הוכיחו כי  $A', B', C'$  נמצאות על ישר אחד.

2. נתון מספר טבעי  $N$ . פנדה בונה עץ בעל  $N$  קודקודים, ובכל קודקוד רושם מספר ממשי, כך שעבור כל קודקוד המספר שרשום בו ועוד 1 גדול או שווה לממוצע המספרים הרשומים בקודקודים השכנים. נסמן את המספר המקסימלי בגרף ב- $M$  ואת המספר המינימלי בגרף ב- $m$ . מינק נותן לפנדה  $M - m$  קילוגרם במבוק. מה הכמות המקסימלית של במבוק שפנדה יוכל לקבל?

3. מצאו את כל הפונקציות הרציפות  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$  עבורן לכל  $x, y$  ממשיים חיוביים מתקיים ש-

$$f\left(\frac{f(x)}{y}\right) - f\left(\frac{f(y)}{x}\right) = xy(f(x+1) - f(y+1))$$

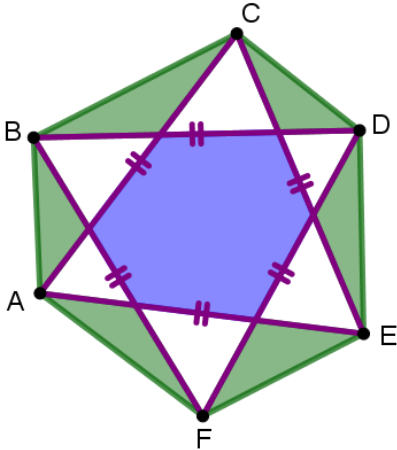
**בהצלחה!**

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

1. מצאו את כל הפתרונות הממשיים למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 8^x \cdot 2^{y-z} + 8^y \cdot 2^{z-x} + 8^z \cdot 2^{x-y} = 73 \\ 4^{x-y} + 4^{y-z} + 4^{z-x} = \frac{73}{8} \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

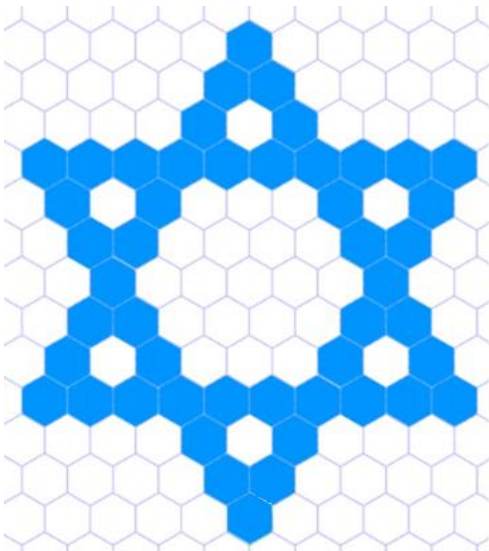


2. במשושה קמור ABCDEF ששת האלכסונים AC, BD, CE, EA, DF, ו-FB שווים זה לזה, ואף שניים מהם לא מקבילים. אלכסונים אלה מחלקים את המשושה ל-13 חלקים: המשושה שנצבע בכחול, ו-12 משולשים; ששת המשולשים שצמודים לצלעות המשושה נצבעו בירוק. איזה שטח גדול יותר: הכחול או הירוק?

3. יהיו  $a < n$  שלמים חיוביים. התברר שבייצוג של  $\frac{1}{a}$  בבסיס  $n$  ישנן שתי ספרות לא אפסיות עוקבות זהות. הוכיחו כי  $\gcd(a, n - 1) > 1$ .

הערה. משתמשים ברישום הקצר, כלומר מעדיפים את  $\frac{1}{2} = 0.5$  על פני  $\frac{1}{2} = 0.499999999...$

4. חשבו את  $\frac{1}{\sqrt[3]{1000 \cdot 1001}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1001 \cdot 1002}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{7999 \cdot 8000}}$ , עם דיוק של 5 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.



5. דוד משחק על שריג משושים אינסופי (כמו בציור). בכל אחת מהמשבצות נמצאת נורה. בהתחלה כמות סופית של נורות דולקות. לדוד יש תבנית בצורת מגן כמתואר בציור. בכל פעולה דוד ממקם את התבנית על השריג כך שתאי התבנית מתלכדים עם תאי השריג ומחליף את מצבן של כל הנורות בתבנית.

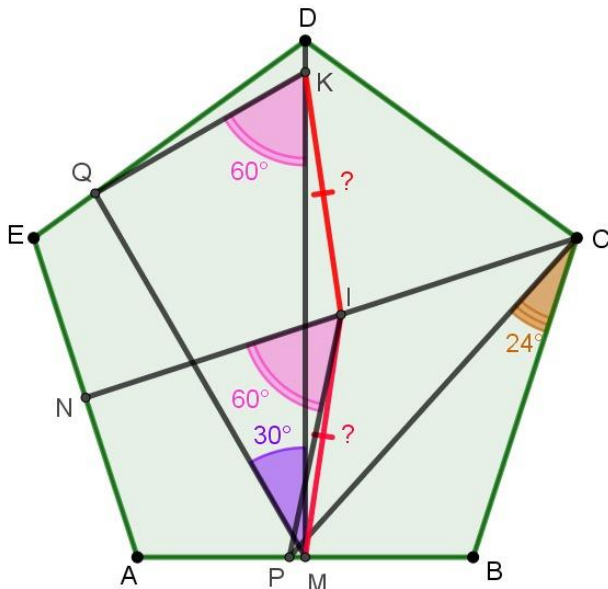
הוכיחו כי דוד יכול להגיע למצב שבו המרחק המינימלי בין שתי נורות דולקות הוא לפחות  $10^{5784}$ .

6. על הלוח כתובים המספרים  $x, x + 1, x + 2$  כאשר  $x$  ממשי חיובי. בכל תור, אמיר יכול להחליף שלשת מספרים  $a, b, c$  שכתובים על הלוח בשלשה:

$$\frac{bc + b + c - a}{a + 1}, \frac{ca + c + a - b}{b + 1}, \frac{ab + a + b - c}{c + 1}$$

האם יתכן שקיים ממשי  $y$  כך שבשלב מסוים של התהליך יופיעו על הלוח המספרים  $y, y + 1000, y + 2000$ ?

הערה: אם אחד המספרים הכתובים על הלוח הוא  $-1$  אז אמיר לא יכול לבצע עוד מהלכים והתהליך מסתיים.



7. במחומש משוכלל  $ABCDE$  האמצעים של הצלעות  $AB$  ו- $AE$  הם  $M$  ו- $N$  בהתאמה. נקודה  $P$  על הצלע  $AB$  מקיימת  $\angle PCB = 24^\circ$ . הנקודה  $Q$  על הצלע  $DE$  מקיימת  $\angle QMD = 30^\circ$ . הנקודות  $I$  ו- $K$  על הקטעים  $DM$  ו- $CN$  בהתאמה מקיימות  $\angle MKQ = 60^\circ = \angle PIN$ . הראו כי  $MI = IK$ .

8. זאב וארנבת נמצאים על קליפה כדורית. הזאב רוצה לתפוס את הארנבת, אך בכל רגע, הזאב מסוגל לראות רק חצי מהקליפה, שהוא במרכז. האם הזאב יכול לתפוס את הארנבת כאשר:

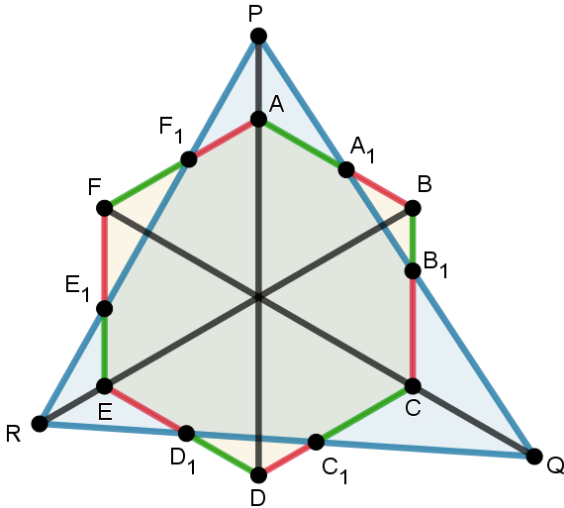
א. הזאב מהיר פי 2.01 מהארנבת?

ב. הזאב מהיר פי 1.51 מהארנבת?

**בהצלחה!**

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון



1. נתון משושה משוכלל  $ABCDEF$ . נקודות  $P, Q, R$ . נמצאות על המשכי האלכסונים  $AD, CF, BE$  מעבר לקודקודים  $A, C, E$  בהתאמה. הקטע  $PQ$  חותך את הצלעות  $AB$  ו- $BC$  בנקודות  $A_1$  ו- $B_1$  בהתאמה. הקטע  $QR$  חותך את  $CD$  ו- $DE$  בנקודות  $C_1$  ו- $D_1$  בהתאמה. הקטע  $RP$  חותך את  $EF$  ו- $FA$  בנקודות  $E_1$  ו- $F_1$  בהתאמה. הראו כי

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot \dots \cdot FF_1 = A_1B \cdot B_1C \cdot \dots \cdot F_1A$$

2. בפינות לוח  $1001 \times 1001$  נמצאים ארבעת הזאבים, ובמשבצת המרכזית כבשה. הכבשה והזאבים משחקים בתורות, הכבשה מתחילה. בתור של הכבשה היא עוברת למשבצת סמוכה לפי צלע; אם היא נמצאת ליד קצה הלוח היא יכולה בתורה לרדת מהלוח ולנצח במשחק. בתור של הזאבים אחד מהזאבים עובר למשבצת סמוכה לפי צלע; אם הכבשה נמצאת במשבצת זאת היא נאכלת והזאבים מנצחים. למי יש אסטרטגיה מנצחת?

3. יהיו  $a, b, c$  ממשיים חיוביים כך ש- $abc = 1$ . הוכיחו כי

$$(a^5 + a + 1)(b^5 + b + 1)(c^5 + c + 1) \geq (a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)$$

4. נגדיר קבוצה  $B = \{1, 2, \dots, 2^{2024}\}$ . תת-קבוצה  $A \subset B$  תקרא מוצלחת, אם לכל שני איברים שונים  $x, y \in A$ , המספר  $\sqrt[4]{x+y}$  אינו שלם. הראו כי קיימת תת-קבוצה מוצלחת שמכילה לפחות 45% מאיברי  $B$ .

**בהצלחה!**