

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. הראו כי לכל $x \geq 0$ מתקיים

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!}\right) \left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots + \frac{(2x)^9}{9!} + \frac{(2x)^{10}}{10!}\right) \geq 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \dots + \frac{(3x)^9}{9!} + \frac{(3x)^{10}}{10!}$$

2. במדינה יש 2023 תושבים, ובשלב ההתחלתי לכל תושב יש 105 מטבעות זהב. קרל ופרידריך משחקים בניהול המדינה. בכל תור ניתן לעשות אחת משתי הפעולות הבאות:

- לבחור אחד מהתושבים הכי עניים, ולקחת מטבע זהב אחד ממנו.
- לקחת מספר מטבעות זהב מתושב שאינו הכי עני במדינה, על מנת שתישאר לו אותה כמות של מטבעות כמו שיש לתושב העני ביותר.

המשחק נגמר כשאי-אפשר לעשות עוד מהלך (כלומר שנגמר הכסף אצל התושבים). מי שעושה את המהלך האחרון מנצח; קרל מתחיל. למי יש אסטרטגיה מנצחת?

3. נתון מרובע קמור $ABCD$. בתוך הקטע AB נבחרה נקודה X כך ש- CX חוצה את שטח המרובע. בתוך הקטע BC נבחרה נקודה Y כך ש- AY חוצה את שטח המרובע. הוכיחו כי XY חוצה את BD .

4. פתרו בשלמים חיוביים

$$x^{y^2+1} + y^{x^2+1} = 2^z$$

בהצלחה!

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. פתרו בשלמים חיוביים

$$x^{y^2+1} + y^{x^2+1} = 2^z$$

2. במשולש ABC מרכז המעגל החסום יסומן ב- I . מרכז המעגל החסום מבחוץ מול A יסומן ב- I_A , ונקודת ההשקה שלו עם BC תסומן D . אמצע הקשת \widehat{BAC} יסומן ב- N , החיתוך של NI עם המעגל החסום של ABC יסומן ב- T . מרכז המעגל החסום של AID יסומן ב- K . הוכיחו כי TI_A מאונך ל- KI .

3. יהיו $0 < c < 1$ ו- n טבעי. איילה וברווז משחקים משחק. ברווז כותב על הלוח n מספרים שלמים, לא כולם שווים זה לזה. במהלך של לוטרה, הלוטרה מוחקת שני מספרים מהלוח וכותבת את הממוצע החשבוני שלהם. איילה מתחילה ועושה לכל היותר cn מהלכים. אחריה, ברווז עושה מהלכים עד שנותרים שני מספרים על הלוח. איילה מנצחת אם שני המספרים שנותרו שונים, אחרת ברווז מנצח. עבור אילו ערכים של c איילה מנצחת לכל n גדול מספיק?

בהצלחה!

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

1. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ כך שלכל $n, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ מתקיים

$$\gcd(f(n+k), f(n)f(k)) = \text{lcm}(f(n) + f(k), f(nk))$$

2. נתונה טבלה 100×100 בה בכל משבצת רשום מספר שלם. משבצת נקראת **עמק** אם הערך בה קטן מהערך בכל משבצת שחולקת איתה צלע. סזיפוס עומד באחת המשבצות. איילה וברווז משחקים בתורות, איילה מתחילה. בכל מהלך שלה, איילה מזיזה את סזיפוס למשבצת סמוכה **לפי צלע** או **קודקוד** שאינה עמק (מהלך של מלך שח); לאחר המהלך **מוסיפים** 1 למספר במשבצת של סזיפוס. בכל מהלך שלו, ברווז מזיז את סזיפוס למשבצת סמוכה **לפי צלע**; לאחר המהלך **מורידים** 1 מהמספר במשבצת של סזיפוס. ברווז רוצה שמתנישהו תהיה משבצת עם ערך של לפחות 2023^{5784} , איילה רוצה שהוא לא יצליח לעולם. מי מנצח?

3. נתון משולש בו c, b, a הם אורכי הצלעות, α, β, γ הן הזוויות (α מול a , β מול b), ו- r הוא רדיוס המעגל החסום. הראו כי

$$r^2 \left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \right)^2 \geq \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + \left(r + \frac{c \cdot \sqrt{3}}{2} \right)^2$$

4. במרחב נמצאות 5 נקודות שונות, אף 3 מהן לא על ישר אחד. כל 3 נקודות יוצרות משולש; משולשים נחשבים מאותו סוג אם ורק אם הם דומים. מהו המספר המינימלי של סוגים שיכולים להתקבל?

5. נתון מספר שלם חיובי A שהייצוג העשרוני שלו לא מכיל את הספרה 0. כאשר הופכים את סדר הספרות, מקבלים מספר B . בנוסף, כאשר הופכים את סדר הספרות של A^{2024} , מקבלים בדיוק את B^{2024} . הוכיחו כי $A = B$.

6. יהיו a, b, c ממשיים חיוביים המקיימים $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. הוכיחו כי

$$a \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + 4}} + b \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^2 + c^2 + 4}} + c \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 4}} \leq \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$$

7. במשולש ABC אמצע הצלע BC יסומן M , מפגש הגבהים יסומן H ומעגל 9 הנקודות יסומן ב- ω . הישר AM חותך שנית את ω ב- G . המעגל BCG חותך שנית את ω בנקודה J . הוכיחו כי הישרים JH, AM נחתכים על המעגל החוסם של ABC .

8. במשרד עובדים k אנשים. ביום הבא-את-ילדיך לעבודה, כל הורה i מביא את a_i ילדיו למשרד. בפעילות גיבוש, הם יושבים במעגל בכורסאות ממוספרות. בכל דקה, שני אנשים שכנים, שאינם הורה והילד שלו, מחליפים מקום. נקרא לסדרת המספרים a_1, a_2, \dots, a_k **k-מגניבה** אם מכל קונפיגורציה התחלתית ניתן להגיע לכל קונפיגורציה סופית במעגל. מצאו את כל הסדרות המגניבות.

הערה. מצבים שנבדלים בסיבוב בלבד נחשבים שונים.

בהצלחה!