

אינטרפולציה?!?

1. לכל פולינום מתוקן ממעלה n ו- $x_0 > x_1 > \dots > x_n$ מספרים שלמים מתקיים ש-

$$\max\{|P(x_0)|, |P(x_1)|, \dots, |P(x_n)|\} \geq \frac{n!}{2^n}$$

2. יהי ראשוני q ופולינום $P(x)$ עם מקדמים שלמים. ידוע ש- $P(0) = 0, P(1) = 1$ ולכל n שלם חיובי שארית החלוקה של $P(n)$ ב- q היא 0 או 1. הוכיחו כי הפולינום ממעלה $q - 1$ לפחות.

3. פונקציה $f(x)$ מקבלת ערכים שלמים בנקודות שלמות. ידוע שלכל ראשוני p קיים פולינום עם מקדמים שלמים $Q_p(x)$ ממעלה c לכל היותר כך שלכל n שלם $f(n) \equiv Q_p(n) \pmod{p}$. הוכיחו כי קיים פולינום שמתלכד עם f בכל הנקודות השלמות.

4. נתון משולש ABC הוכיחו עבור כל נקודה P

$$\frac{PA}{BC} + \frac{PB}{AC} + \frac{PC}{AB} \geq \sqrt{3}$$

5. חשבו את הסכומים הבאים:

$$S_m = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m, \quad m \in \{0, 1, \dots, n+1\}$$

6. הוכיחו כי קיים קבוע ממשי c כך שלכל פולינום מתוקן ממעלה n מתקיים ש-

$$\max_{0 \leq x \leq 2} |P(x)| \leq c^n \max_{0 \leq x \leq 1} |P(x)|$$

7. הוכיחו כי לכל $x_1, \dots, x_n \in [-1, 1]$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{j \neq i} |x_j - x_i|} \geq 2^{n-2}$$

8. הוכיחו כי לכל פולינום מתוקן קיים z כך ש- $|z| = 1$ ו- $|f(z)| \geq 1$.

9. יהי $P(x)$ פולינום מתוקן ממעלה n עם מקדמים ממשיים. הוכיחו כי

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

10. יהי P פולינום ממעלה n עבורו $\max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| \leq 1$

ויהי $Q = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$. הראו כי $\max_{-1 \leq x \leq 1} |Q(x)| \leq 2^{n-1}$.

11. יהי פולינום P ממעלה $n - 1$ עבורו לכל $x \in [-1, 1]$ מתקיים:

$$|P(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

הראו כי $|P(x)| \leq n$ לכל $-1 \leq x \leq 1$.

12. יהי פולינום P ממעלה n עבורו $\|P\| \leq 1$ הראו כי $\|P'\| \leq n^2$.

בתאבון!