

# אי-שוויונים

1. נתונה סדרה אינסופית של מספרים חיוביים  $a_1, a_2, \dots$  המקיימת

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_{n+1}^2}{n+1}}$$

הוכיחו כי הסדרה קבועה.

2. המספרים הממשיים  $a, b$  מקיימים  $a^3 - b^3 = 2$  וכן  $a^5 - b^5 \geq 4$ . הוכיחו כי  $a^2 + b^2 \geq 2$ .

3. הראו כי לכל  $n > m$  שלמים חיוביים מתקיים

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{m}) < \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{m-1})$$

4. יהיו  $a_1, \dots, a_n$  ממשיים חיוביים שסכומם 1. הוכיחו כי לכל  $k \geq 1$  מתקיים

$$\left(a_1^k + \frac{1}{a_1^k}\right) \left(a_2^k + \frac{1}{a_2^k}\right) \dots \left(a_n^k + \frac{1}{a_n^k}\right) \geq \left(n^k + \frac{1}{n^k}\right)^n$$

5. יהיו  $x_0 > x_1 > \dots > x_n$  מספרים ממשיים. הוכיחו כי

$$\frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq x_n - x_0 + 2n$$

6. יהיו  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  מספרים חיוביים. הוכיחו כי

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + x_2^2} + \frac{x_2 - x_4}{x_2 x_4 + 2x_3 x_4 + x_3^2} + \dots + \frac{x_n - x_2}{x_n x_2 + 2x_1 x_2 + x_1^2} \geq 0$$

7. יהיו  $x_1, x_2, \dots, x_n$  מספרים ממשיים. הוכיחו כי

$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1 + x_1^2 + \dots + x_n^2} < \sqrt{n}$$

8. יהא  $n > 2$  והיו  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  אי-שליליים. הוכיחו כי

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

9. יהיו  $x_1, x_2, \dots, x_n$  מספרים ממשיים. הוכיחו כי

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |x_i + x_j| \geq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |x_i - x_j|$$

10. יהיו  $x_1, x_2, \dots, x_n$  מספרים חיוביים. הוכיחו כי

$$(1 + x_1)(1 + x_1 + x_2) \cdots (1 + x_1 + \cdots + x_n) \geq \sqrt{(n+1)^{n+1}} \sqrt{x_1 \cdots x_n}$$

11. נתונה סדרת ממשיים המקיימת  $a_1 = 3$  וכן לכל  $i \geq 1$ ,

$$a_i = 2 + \frac{3}{a_{i+1} - a_i}$$

מצאו את ה- $K$  המינימלי עבורו לכל  $k$ , מתקיים

$$\frac{1}{a_1^3 + 1} + \frac{1}{a_2^3 + 1} + \cdots + \frac{1}{a_k^3 + 1} < K$$

12. מצאו את ה- $a$  הגדול ביותר עבורו לכל  $n$  ולכל חיוביים

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_3 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \geq a \left( \frac{2}{x_1} + \frac{3}{x_2} + \cdots + \frac{n+1}{x_n} \right)$$

**בתיאבון!!**