# מעגלים חסומים

## רקע.

1. הדרור השני: משולש $ABC$ חוסם מעגל שמרכזו $I$. על הצלעות $AB, AC$ נתונות נקודות $D, E$. המרובע $ADIE$ חסום במעגל אם ורק אם $BD + CE = BC$.

2. מרובע $ABCD$ חסום במעגל. נסמן ב-$I_A, I_B$ את מרכזי המעגלים החסומים במשולשים $BCD, ACD$ בהאתמה. נסמן ב-$J_C, J_D$ את מרכזי המעגלים החסומים מבחוץ במשולשים $ABD, ABC$ מול הקודקודים $B, A$ בהתאמה. הראו כי $I_A, I_B, J_C, J_D$ נמצאים על ישר אחד.

3. על הצלע $BC$ של משולש $ABC$ נבחרה נקודה $P$. נסמן ב-$\omega_B, \omega_C$ את המעגלים החסומים במשולשים $ABP, ACP$ בהתאמה. נסמן ב-$I_B, I_C$ את המרכזים של $\omega_B, \omega_C$. המעגל החסום במשולש $ABC$ משיק לצלע $BC$ בנקודה $D$.

א. הראו כי המשיק המשותף הפנימי של $\omega_B, \omega_C$ ששונה מ-$AP$, עובר ב-$D$.
ב. הראו כי $I_BDPI_C$ חסום במעגל.

## פרק ב'.

בכל השאלות בפרק זה מדברים על מרובע **חוסם** $ABCD$.

עבור נקודה $P$ נסמן ב-$I_1, I_2, I_3, I_4$ את מרכזי המעגלים החסומים במשולשים $ABP, BCP, CDP, DAP$ בהתאמה.

1. בהנחה ש-$P$ נמצאת על הצלע $AB$ הראו כי $P, I_2, I_3, I_4$ נמצאות על מעגל אחד.

2. $PI_1I_2, PI_3I_4$ נחתכים על חוצה הזווית החיצוני של $\angle APC$.

3. נניח שהמרובע חסום ו-$P$ היא מרכז המעגל החוסם. הראו כי $I_1, I_2, I_3, I_4$ נמצאות על מעגל אחד.

4. בהנחה ש-$P$ היא חיתוך אלכסוני המרובע, הראו כי $I_1I_2I_3I_4$ חסום במעגל.

5. הראו ארבעת התנאים הבאים שקולים:

- $I_1I_2I_3I_4$ חסום במעגל.
- אינוורסיה עם מרכז ב-$P$ מעבירה את המרובע $ABCD$ למרובע חוסם.
- הישרים $I_1I_2, I_3I_4$ נחתכים על חוצה הזווית החיצוני של $\angle APC$.
- $PX$ ו-$PY$ הם חוצי הזוויות משולשים $APC$ ו-$BPD$ בהתאמה. הראו כי $XY$ עובר במרכז המעגל החסום ב-$ABCD$.

6. א. $P$ מקיימת ש-$ABCP$ מרובע קמור שמכיל את $D$,
ו-$\angle APD = \angle BPC$. הראו כי $I_1I_2I_3I_4$ חסום במעגל שמרכזו על $PI$.

ב. הראו כי לארבעת המעגלים החסומים הנ"ל יש משיק משותף.

# פרק א'.

1. $AD, BE, CF$ הם חוצי הזוויות במשולש $ABC$, $I$ הוא מפגש חוצי הזוויות. נסמן את מרכזי המעגלים החסומים במשולשים $AIF, BIF, BID, CID, CIE, AIE$ ב-$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$. הוכיחו ש-$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ נמצאות על שניונית.

**<u>פתרון ראשון:</u>**

א. הראו כי $AI$ חוצה את $\angle I_2AI_5$.

ב. נסמן ב-$P_1$ את החיתוך של $I_1I$ עם $AB$. באופן דומה נגדיר את $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ באופן דומה. הראו כי כל ה-$P_i$-ים נמצאים על שניות אחת.

ג. הראו כי $I_1P_2P_3I_4P_5P_6$ נמצאות על שניונית.

ד. הראו כי $I_1I_2P_3I_4I_5P_6$ נמצאות על שניונית.

ה. הראו כי $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ נמצאות על שניונית.

**<u>פתרון שני:</u>**

ב. נסמן ב-$X$ את החיתוך של $I_2I_5$ עם חוצה הזווית החיצוני של $\angle BAC$. באופן דומה נגדיר את $Y, Z$. הראו כי $X, Y, Z$ נמצאות על ישר אחד.

ג. נסמן ב-$Q$ את החיתוך של $I_1I_6$ עם $I_3I_4$. הראו כי $Q$ נמצאת על הישר מהסעיף הקודם.

ד. הראו כי $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ נמצאות על שניונית.

2. בניסוח של השאלה הקודמת נחליף את $I$ בנקודת טוריצ'לי.
הוכיחו ש-$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ נמצאות על שניונית.