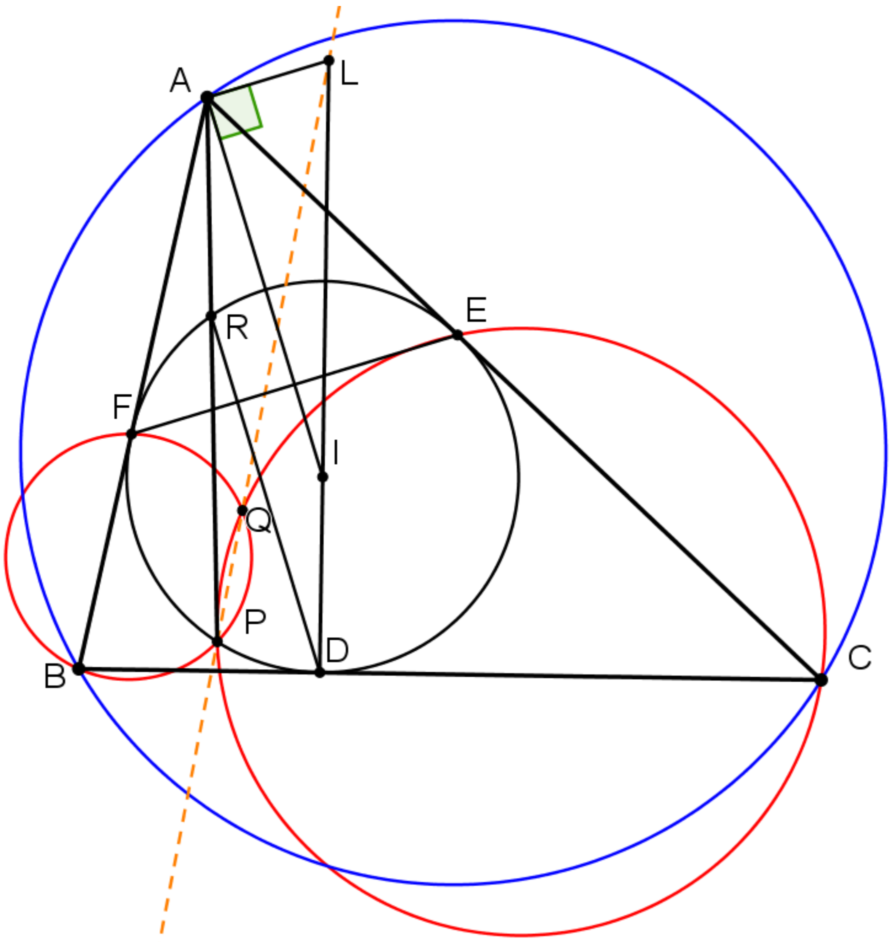
:IMO 2019 P.6

המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות בנקודות D, E, F. מרכז המעגל החסום יסומן I. תהי R נקודה על המעגל החסום כך ש-DR מאונך ל-EF. הישר AR חותך את המעגל החסום שנית בנקודה P. המעגלים החוסמים של BPF, CPE נחתכים שנית בנקודה Q. נסמן את החיתוך של DI עם חוצה הזווית החיצוני של $\angle BAC$ ב-L.
הוכיחו כי P, Q, L נמצאות על ישר אחד.



מטרת התרגיל היא לראות הרבה פתרונות בהרבה גישות שונות לשאלה זו ובכללי להבין דברים מגניבים על הציור.

בעמודים הבאים יש רשימה של פתרונות עם רמזים, **מאוד** מומלץ לחשוב על השאלה לפני שאתם עוברים להסתכל על הפתרונות.
כשאתם עוברים על הפתרונות מומלץ לא "לקרוא" את מה שכתוב אלה לעצור כמה שיותר ולנסות להבין בעצמכם מה הוא השלב הבא.

בתאבון

בכל הפתרונות הנקודה הנגדית ל-D על המעגל החסום תסומן ב-G.

פתרון 1:

טענה 1: $BQIC$ מעגל.

טענה 2: $ALDP$ מעגל.

המשך 1: תמיד תחשבו על העתקה ספירלית!
נסמן ב-M את מרכז העתקה הספירלית שמעביר את E, F ל-C, B. מה קורה ל-R? מה קורה ל-P? נסמן ב-K את התמונה של P בהעתקה.

טענה 3: P, Q, K ישר.
טענה 4: P, K, L ישר.

המשך 2: נסמן ב-T החיתוך של AP עם המעגל החוסם וב-K את החיתוך השני של PQ עם מעגל BIC.

טענה 3: IT הוא האנך האמצעי של PD.

טענה 4: $AIDK$ מעגל.

טענה 5: ניצחנו כבר.

המשך 2': נמשיך אחרי טענה 3.

נסמן את אמצע IL ב-Y.

טענה 4: TY חוצה את PI.

טענה 5: ראה טענה 5 מהמשך 2.

המשך 2'': נמשיך אחרי טענה 3.

נסמן ב-N את החיתוך של AL עם המעגל החוסם.

שימו לב ש-$\frac{PT}{AP} = \tan^2\frac{\alpha}{2}$. תעשו מנלאוס במשולש ATN.

פתרון 2:

נבצע אינוורסיה ביחס למעגל החסום.

טענה 1: $B'Q'C'$ ישר.

נסמן את החיתוך השני של המעגל $PQ'I$ עם $B'C'$ ב-K.

טענה 2: KI חוצה את $\angle DIP$.

טענה 3: $PQ'KIL'$ מעגל.

פתרון 3:

טענה 1: dדרגה זה מגניב.

טענה 2: נסמן ב-X את החיתוך של AL עם BC אזי מתקיים

$$pow_{BPF}(X) - pow_{CPE}(X) = pow_{BDIF}(X) - pow_{CDIE}(X)$$

פתרון 4:

נסמן את החיתוך של EF עם RI, DR, BPQ, CPE ב-X, H, U, V בהתאמה.

טענה 1: X נמצאת על PL.

טענה 2: $\frac{XE}{XF} = \left(\frac{DF}{DE}\right)^2 \cdot \frac{HE}{HF}$

טענה 3: $\frac{EU}{FV} = \left(\frac{DF}{DE}\right)^2 \cdot \left(\frac{HE}{HF}\right)^2 \cdot \frac{BF}{CE}$

פתרון 5:

נסמן ב-M את אמצע EF וב-N את החיתוך השני של PL עם המעגל החסום.

נסמן את החיתוכים השניים של EF עם המעגלים BPF, CPE ב-U, V בהתאמה.

טענה 1: D, M, N ישר.

טענה 2: CQU ישר.

טענה 3: P, Q, N ישר אם ורק אם $RF || VI$.

טענה 4: $\Delta PFV \sim \Delta \mathrm{PCE}$

פתרון 6:

ננסח שאלה כללית. נתון משולש DEF המסחום במעגל ω ו-G נגדית ל-D על המעגל. המשיק ל-ω ב-D פוגש את המשיקים ל-ω ב-F, E בנקודות B, C בהתאמה. תהי N נקודה על ω. נסמן ב-M את החיתוך של DN עם EF. הישר המקביל ל-NE ועובר ב-C חותך את EF ב-U והישר המקביל ל-NF ועובר ב-B חותך את EF ב-V. נסמן ב-Q את החיתוך של BV עם CU וב-P את החיתוך השני של NQ עם ω.

<u>טענה 1:</u> P, M, G ישר...

<u>טענה 2:</u> ראה טענה 1 מפתרון 5 ואז טענה 5 מהמשך 2 של פתרון 1.

פתרון 7, הפתרון המקורי של מחבר השאלה:

נסמן ב-X את החיתוך של EF עם BC. EF חותך שנית את המעגל BIS בנקודה V ואת המעגל CIS בנקודה U.

נסמן ב-T את החיתוך השני של AR עם המעגל החוסם.

AR חותך את המעגל החוסם של BTI בנקודות T, Y ואת המעגל החוסם של CTI בנקודות T, Z.

<u>טענה 1:</u> I, U, Y ישר.

<u>טענה 2:</u> המחומש $BQYFU$ חסום במעגל.

נסמן ב-N את החיתוך השני של DM עם המעגל החסום.

<u>טענה 3:</u> $BV||FN$

<u>טענה 4:</u> P נמצאת על המעגל BYF.

<u>טענה 5:</u> P, N, Q, L ישר.

פתרון 8:

נסתכל על המקום הגיאומטרי של נקודות X כך שהציר הרדיקלי של המעגלים BFX, CEX עובר ב-L.

טענה 1: המקום הגיאומטרי הוא עקום אליפטי.

טענה 2: $B, C, D, E, F, L, I, I, J$ על העקום.

טענה 3: חשבון על עקום זה מגניב.

פתרון 9:

חישוב מרוכב.

טענה 1: מרכז של המעגל החוסם של משולש ABC כללי נתון על ידי הנוסחה:

$$\frac{\begin{vmatrix} a & |a|^2 & 1 \\ b & |b|^2 & 1 \\ c & |c|^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}}$$

טענה 2: הראש יותר חזק מהקיר.