

הילי

משפט הילי. יהי אוסף של קבוצות קמורות ב- \mathbb{R}^d . ידוע שכל $d + 1$ מהן נחתכות, אזי כל הקבוצות הנתונות נחתכות.

הראו שהגרסה הבאה של הילי אינה נכונה: יהי אוסף של קבוצות קמורות ב- \mathbb{R}^d . ידוע שלכל $d + 1$ ניתן לסמן שתי נקודות שכל אחת מהקבוצות תכיל לפחות אחת מהן, אזי ניתן לסמן שתי נקודות כך שכל הקבוצות מכילות לפחות אחת מהן.

1. נתון מצולע קמור, ידוע שלכל שלוש צלעות של המצולע ניתן למצוא נקודה O בתוך המצולע כך שהאנכים מ- O לשלושת הצלעות יפלו בתוך הצלעות. הוכיחו כי ניתן למצוא נקודה O כך שהאנכים ממנה לכל הצלעות יפלו בתוך הצלעות.

2. נתונים n ישרים במישור. ידוע שלכל שלושה מהם ניתן להעביר מעגל עם רדיוס 1 שחותך את שלושת הישרים. הוכיחו כי ניתן להעביר מעגל עם רדיוס 1 שחותך את כל הישרים הנתונים.

3. הוכיחו כי בכל משו"ב קמור ניתן למצוא נקודה שלא נמצאת באף אחד מהמרובעים שנוצרים מרביעיות של קודקודים רצופים של המשו"ב.

4. נתונות n נקודות במישור $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. ידוע שלכל שלשה של נקודות ניתן למצוא מספרים ממשיים a, b כך ש- $ax_i + by_i > 0$ לכל (x_i, y_i) מהשלשה. הראו כי קיימים a, b עבורם $ax_i + by_i > 0$ לכל אחת מהנקודות הנתונות.

5. במישור סומנו n נקודות, ידוע שכל שלשה של נקודות מסומנות ניתן לכסות עם עיגול ברדיוס 1. הוכיחו כי ניתן לכסות את כל הנקודות המסומנות על ידי עיגול עם רדיוס 1.

6. נתונה קבוצה סגורה במישור שקוטרה 1. הוכיחו כי ניתן לכסות את הקבוצה עם עיגול שרדיוסו $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. נתונה קבוצה קמורה במישור שהיקפה 1. הוכיחו כי ניתן לכסות את הקבוצה עם עיגול שרדיוסו $\frac{1}{4}$.

8. יהיו אוסף של חצי מישורים שמכסים את כל המישור. הוכיחו כי ניתן למצוא שלושה חצאי מישורים מהאוסף שמכסים את כל המישור.

9. הוכיחו כי לכל קבוצה קמורה S במישור ניתן לבחור נקודה O בתוך הקבוצה כך שלכל שתי נקודות A, B על השפה של S עבורן O נמצא על הקטע AB יתקיים ש-

$$\frac{1}{2} \leq \frac{OA}{OB} \leq 2$$

10. נתונות קבוצות קמורות X_1, X_2, \dots, X_n במישור. תהי K קבוצה קמורה במישור כך שלכל שלשה X_i, X_j, X_k קיימת הזזה של K שנמצאת בחיתוך של שלושת ה- X ים. הוכיחו כי קיימת הזזה של K שנמצאת בחיתוך של כל ה- X ים.

11. במישור נתונים מספר קטעים אופקיים. ידוע שעבור כל שלושה קטעים ניתן להעביר ישר שיחתוך את שלושתם. הוכיחו כי קיים ישר שחותך את כל הקטעים הנתונים.