

# חברותא תומס

1. נסמן ב- $d(n)$  את כמות המחלקים של  $n$ . הראו כי קיימים אינסוף  $n$ ים עבורם:

$$d(n^2 + 1) \geq d((n + 1)^2 + 1)$$

2. זוג מספרים שלמים  $(a, b)$  יקרא מרובע אם  $ab + 1$  הוא ריבוע שלם. קבעו עבור אילו  $n$ ים ניתן לחלק את הקבוצה  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  ל- $n$  זוגות מרובעים.

3. יהיו  $2 \leq x, y \leq 100$  שלמים. הראו כי קיים  $n$  כך ש- $x^{2^n} + y^{2^n}$  פריק.

4. נתבונן בסדרה  $a_n = d(n!) - d((n - 1)!)$ . הראו כי קיימים אינסוף מספרים פריקים  $m$  עבורם  $a_m > a_k$  לכל  $k < m$ .

5. מצאו את כל הפולינומים  $P$  עם מקדמים שלמים עבורם לכל  $n$  שלם מתקיים:

$$P(n) \mid P(2^n) - 2^{P(n)}$$

6. מצאו את כל ה- $n$ ים עבורם קיימים שלמים חיוביים  $b_1, b_2, \dots, b_n$  לא כולם שווים כך שלכל  $k$  שלם חיובי מתקיים ש- $(b_1 + k)(b_2 + k) \dots (b_n + k)$  זו חזקה שלמה.

7. הראו כי  $10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1$  פריק לכל  $n$  שלם.

8. יהי  $k$  שלם חיובי. מצאו את כל הפונקציות  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  המקיימות את שני התנאים הבאים:

- $p^k$  נמצא בתמונה עבור אינסוף מספרים ראשוניים  $p$ .
- $f(m) + f(n) \mid f(m + n)$  לכל  $m, n$  שלמים חיוביים.

9. מצאו את כל השלשות  $(a, b, p)$  של שלמים חיוביים, כך ש- $p$  ראשוני ומתקיים:

$$a^5 + b^4 = pab$$

10. הראו כי קיים שלם חיובי  $K$  עבורו מתקיים שלכל  $p > K$  כמות השלמים החיוביים  $a \leq p$  כך ש- $p^2 \mid a^{p-1} - 1$ , קטנה מ- $\frac{p}{2^{2024}}$ .

**בתאבון!**