חמדנות!

Greed is Good!

1. הוכיחו כי לכל מספר שלם יש ייצוג יחיד בבסיס פאקטוריאלי כלומר לכל מספר שלם חיובי n קיימים שלמים ... $a_1, a_2,$ כך שלכל i מתקיים ש-$a_i \leq i$ ו-

$$n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots$$

2. הוכיחו כי כל מספר רציונלי בין 0 ל-1 ניתן לייצג כסכום של שברים מיצריים שונים.

תזכורת: שבר מצרי הוא שבר מהצורה $\frac{1}{n}$ עבור n שלם חיובי.

3. יהי גרף עם n קודקודים ו-m קשתות. הוכיחו כי ניתן למצוא תת גרף לגרף הנתון כך שהדרגה של כל קודקוד היא לפחות $\frac{m}{n}$.

4. נתון n שלם חיובי ומספרים ממשיים $0 \leq a_1, a_2, a_3, \dots, a_m \leq 1$ שסכומם n. מצאו את ה-k המינימלי עבורו בוודאות ניתן לחלק את המספרים ל-k קבוצות כך שהסכום בכל קבוצה לא יעלה על 1.

5. יהי k שלם חיובי. איילה וברווז משחקים משחק, לאיילה יש k דפי נייר על כל אחד מהם היא רושמת את כל המספרים השלמים מ-1 עד n כך שחלק מהמספרים רשומים על גבי צד אחד של הדף וחלק על גבי הצד השני. איילה מניחה את הדפים על השולחן לאחר מכן ברווז בוחר להפוך חלק מהדפים, אם ברווז יכול לגרום כך שכל מספר יופיע על גבי צד עליון של אחד הדפים הוא מנצח. מה הוא ה-k הקטן ביותר עבורו ברווז ינצח?

6. א. הוכיחו כי מכל קבוצה של n מספרים ממשיים ניתן לבחור תת קבוצה מגודל $\left\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ לפחות כך שאף שלושה מספרים מתת הקבוצה לא מהווים סדרה חשבונית.

ב. האם ניתן לבחור 1983 מספרים שלמים חיוביים הקטנים שווים ל-10^5 כך שאף שלושה מבניהם לא מהווים סדרה חשבונית?

7. תהי טבלה $n \times 2$, בכל משבצת של הטבלה רשום מספר חיובי. הסכום בכל עמודה של הטבלה שווה ל-1. הוכיחו כי ניתן לסמן מספר אחד מכל עמודה כך שהסכום של המספרים המסומנים בכל אחת מהשורות לא יעלה על $\frac{n+1}{4}$.

8. בכיתה n ילדים שהולכים ל-n חוגים, לכל חוג הולכים שלושה ילדים. הוכיחו כי ניתן לשלוח לפחות $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ מהילדים לטיול כך שלא יהיה חוג שכל התלמידים ממנו יצאו לטיול.

9. נתונות n נקודות במישור. שתי נקודות נקראות מקושרות אם יש להן את אותה קואורדינטת x או אותה קואורדינטת y. הוכיחו כי ניתן לחלק את הנקודות במישור לקבוצות כך שבכל קבוצה כל הנקודות נמצאות על ישר אחד ויש לכל היותר $n^{\frac{3}{2}}$ זוגות (לא סדורים) של נקודות מקושרות מקבוצות שונות של החלוקה.

10. שלישיית מספרים שלמים חיוביים (x, y, z) המקיימים $x < y < z$ ו-$\{z - y, y - x\} = \{1776, 2001\}$ נקראת שלישייה היסטורית. הוכיחו כי ניתן לרשום את המספרים השלמים החיוביים כאיחוד זר של שלישיות היסטוריות.

בתאבון!