Geometrie der Zahlen

1. אתם עומדים בראשית הצירים. בכל נקודה שלמה צומח עץ עם רדיוס r. הראו כי שדה הראיה שלכם חסום.

2. נתונים a, b, c שלמים חיוביים עבור מתקיים ש-$ac = b^2 + b + 1$.
הראו כי קיים פתרון במספרים שלמים למשוואה הבאה:

$$ax^2 - (2b+1)xy + cy^2 = 1.$$

3. נתון n שלם חיובי עבורו למשוואה $x^2 + xy + y^2 = n$ יש פתרון ברציונליים. הראו כי למשוואה קיים גם פתרון בשלמים.

4. תהי A מטריצה $n \times n$, הפיכה עם ערכים ממשיים. הראו כי קיימים $b_1, \dots, b_n$ שלמים שלא כולם שווים ל-0 ו-

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot b_j \right| \le \sqrt[n]{|\det A| \cdot n!}$$

5. יהי α מספר אי-רציונלי. הראו כי קיימים אינסוף מספרים רציונליים $\frac{p}{q}$ עבורם

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{q^2}$$

6. יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ מספרים אי-רציונליים. הראו כי קיימים אינסוף רציונליים $\frac{p_1}{q}, \dots, \frac{p_n}{q}$ עבורם לכל $1 \le i \le n$ מתקיים:

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| \le \frac{1}{q^{1+\frac{1}{n}}}.$$

7. הראו כי כל מספר שלם חיובי ניתן לייצג כסכום של ארבעה ריבועים שלמים.

8. הראו כי כמות הדרכים לייצג את 2^n כסכום של חזקות 2 עם מעריך אי-שלילי, שווה ל-

$$2^{\frac{n^2}{2} - n\log_2(n) + O(n)}.$$

9. יהיו k, m, n שלמים חיוביים עבורם מתקיים ש-$mk = n^2 + 1$. הראו כי קיימים a, b, c, d שלמים כך ש-$m = a^2 + b^2, k = c^2 + d^2, n = ac + bd$.

10. יהי n שלם חיובי שניתן לייצג כסכום של שלושה ריבועים רציונליים. הראו כי ניתן לייצג את n כסכום של שלושה ריבועים שלמים.

11. יהיו n שלם חיובי. ידוע שלמשוואה $x^3 + y^3 = n$ קיים פתרון ברציונליים. הראו כי למשוואה קיים גם בפתרון ברציונליים האי-שליליים.