

פורייה

0. חשבו את הסכום:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{3k}$$

1. הוכיחו כי לא ניתן לפרק את השלמים לסדרות חשבוניות זרות עם הפרשים שונים.
2. מצאו את כמות תתי הקבוצות של $\{1, 2, \dots, 2000\}$ שסכומים מתחלק ב-5.
3. יהי p ראשוני, וקבוצה $X = \{1, 2, \dots, 2p\}$. תת קבוצה של X תקרא מפוארת אם היא מגודל p וסכום אבריה מתחלק ב- p . מצאו את מספר הקבוצות המפוארות.
4. מצאו את כל הזוגות של מספרים שלמים (a, b) כך ש- $a, b \neq 0$ ו- $a \neq b$ עבורם קיימת קבוצה X של מספרים שלמים עבורה לכל שלם n בדיוק אחד מבין המספרים $n, n + a, n + b$ נמצא ב- X .
5. המספרים השלמים נצבעו בארבעה צבעים. נתונים שלמים אי-זוגיים x, y כך ש- $|x| \neq |y|$. הראו כי קיימים שני מספרים הצבועים באותו צבע שהפרשם הוא $x + y, x - y$ או x, y .
6. נתונים a, b שלמים חיוביים ושתי קבוצות זרות של A, B של מספרים שלמים כך שלכל $i \in A \cup B$, מתקיים $a + i \in A$ או $i - b \in B$. הוכיחו כי $a|A| = b|B|$.
7. נתונים פולינומים P, Q, R עם מקדמים ממשיים עבורם $P \cdot Q = R^2$. לכל פולינום נסמן ב- $S(P)$ את סכום ריבועי המקדמים של הפולינום. הוכיחו כי $S(P) \cdot S(Q) \geq S(R)^2$.
8. נתונים שלמים חיוביים שונים a_1, \dots, a_k ושלם ℓ . הוכיחו כי כמות הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = 0$ גדולה או שווה לכמות הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = \ell$ כאשר $x_i \in \{a_1, -a_1, \dots, a_k, -a_k\}$ לכל i .
9. מייצרים גרף מקרי עם 16 קודקודים, בכך שמעבירים כל קשת בסיכוי $\frac{1}{2}$ באופן בלתי תלוי. מה הסיכוי שדרגות כל הקודקודים בגרף מתחלקות ב-4?
10. בשורה עומדים 17 פועלים. קבוצה של $k \geq 2$ אנשים שעומדים ברצף תקרא צוות. מנהל המפעל מעוניין לבחור עבור כל צוות ראש שהוא אחד מחברי הצוות. המנהל רוצה שכל עובד יתפקד כראש צוות בכמות צוותים שמתחלקת ב-4. הוכיחו כי כמות הדרכים לבחור ראשי צוות מתחלק ב-17.

בתאבון!