גיאומטריה קמורה

משפט קאראתאודורי. יהי אוסף של n נקודות ב-$\mathbb{R}^d$ ונקודה P בקמור שלהן. אזי ניתן לבחור $d+1$ נקודות מהאוסף כך ש-P תהיה בקמור שלהן.

משפט רדון. כל $d+2$ נקודות ב-$\mathbb{R}^d$ ניתן לחלק לשתי קבוצות כך שהקמורים שלהם יחתכו.

משפט הלי. יהי אוסף סופי של קבוצות קמורות ב-$\mathbb{R}^d$. ידוע שכל $d+1$ מהן נחתכות, אזי כל הקבוצות הנתונות נחתכות.

0. הוכיחו את המשפטים.

1. במישור סומנו n נקודות, ידוע שכל שלשה של נקודות מסומנות ניתן לכסות עם עיגול ברדיוס 1. הוכיחו כי ניתן לכסות את כל הנקודות המסומנות על ידי מעגל עם רדיוס 1.

2. יהיו אוסף של חצי מישורים שמכסים את כל המישור. הוכיחו כי ניתן למצוא שלושה חצאי מישורים מהאוסף שמכסים את כל המישור.

3. **משפט קירכברגר.** נתונות n נקודות כחולות ו-m נקודות אדומות ב-$\mathbb{R}^d$. ידוע שכל $d+2$ נקודות ניתן להפריד עם על-מישור לשתי קבוצות מונוכרומטיות. הוכיחו כי ניתן להפריד את כל הנקודות לשתי קבוצות מונוכרומטיות.

4. נתונות קבוצות קמורות $X_1, X_2, \dots, X_n$ במישור. תהי K קבוצה קמורה במישור כך שלכל שלשה X_i, X_j, X_k קיימת הזזה של K שנמצאת בחיתוך של שלושת ה-Xים. הוכיחו כי קיימת הזזה של K שנמצאת בחיתוך של כל ה-Xים.

5. שני על מישורים מקבילים ב-$\mathbb{R}^d$ חותכים ממנו צורה שתקרא פס. עובי של קבוצה סגורה במרחב מוגדר להיות העובי המינימאלי של פס שמכסה את הצורה. נתון אוסף N קבוצות קמורות ב-$\mathbb{R}^d$. ידוע כי החיתוך של כל $d+1$ מהן מעובי 1 לפחות. הראו כי החיתוך של כל N הצורות הוא מעובי 1 לפחות.

<u>הגדרה:</u> יהי אוסף של n נקודות ב-$\mathbb{R}^d$. נקודה $x \in \mathbb{R}^d$ תקרא מרכזית עבור אוסף הנקודות אם כל חצי מישור סגור שמכיל את x מכיל לפחות $\frac{n}{d+1}$ נקודות מהאוסף.

6. **משפט הנקודה המרכזית.** לכל אוסף של נקודות ב-$\mathbb{R}^d$ קיימת נקודה מרכזית.

7. במישור נתונים מספר קטעים אופקיים. ידוע שעבור כל שלושה קטעים ניתן להעביר ישר שיחתוך את שלושתם. הוכיחו כי קיים ישר שחותך את כל הקטעים הנתונים.

8. **קאראתאודורי צבעוני.** יהיו n נקודות ב-$d+1$ צבעים ב-$\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ ותהי נקודה P בכל אחד מבין $d+1$ הקמורים המונוכרומטיים. אזי ניתן לבחור נקודה אחת מכל צבע כך ש-P תהיה בקמור שלהן.

משפט טוורברג. קבוצה X של $(r-1)(d+1)+1$ נקודות ב-$\mathbb{R}^d$ ניתן לחלק ל-r קבוצות שונות $X_1, X_2, \ldots., X_r$ כך שקיימת נקודה הנמצאת בקמורים של כל X_i.

9. הוכיחו את משפט טוורברג במישור.

10. **משפט הלי יחסי.** יהי קבוע $\alpha > 0$ וקבוצות קמורות $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ב-$\mathbb{R}^d$ כך שלפחות $\alpha \binom{n}{d+1}$ מ-$\binom{n}{d+1}$ האוספים מגודל $d+1$ נחתכים. אזי קיים קבוע β שתלוי ב-α, d אבל לא ב-n כך שלפחות βn מהקבוצות נחתכות.

11. האם קיים אוסף אינסופי של מצולעים מישוריים בעלי 2024 צלעות (לא בהכרח קמורים) כך שכל שלושה מהם נחתכים אבל אף ארבעה לא נחתכים?

12. **משפט ברני.** לכל קבוצה של n נקודות ב-$\mathbb{R}^d$ ניתן למצוא נקודה שמוכלת לפחות ב-$\alpha \binom{n}{d+1}$ סימפלקסים עם קודקודים בקבוצה. כאשר α קבוע שתלוי רק ב-d.

בתאבון!