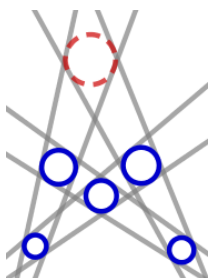


משטח מוסווה

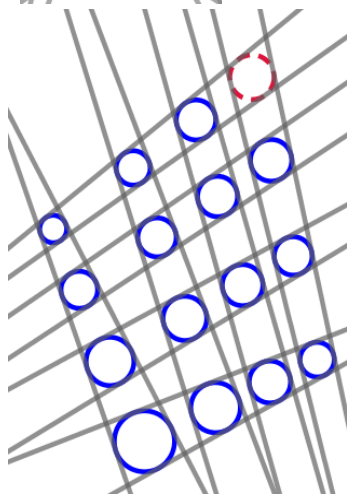
1. יהיה L אורך של גרף הסינוס (ברדיאנים) למשך מחזור שלם. מסתבר שזה גם האורך של האליפסה, שהציר הקצר שלה באורך 2 והציר הארוך שלה באורך a . מצאו את a . האם תוכלו לנסח ולהוכיח טענה דומה עבור גרף של סינוס במעלות?

2. נתונים שלושה מעגלים שונים במרחב תלת-מימדי: α, β, γ (לאו דווקא בעלי אותו רדיוס). למעגל β



יש ארבע נקודות חיתוך שונות עם שני המעגלים האחרים. נתון של- α ו- γ יש נקודת חיתוך, שבה המעגלים α ו- γ נחתכים ולא משיקים. האם בהכרח יש ל- α ו- γ נקודת חיתוך נוספת?

3. בציור נתון שיש 5 מעגלים כחולים שכל אחד מהם משיק ל-4 ישרים, הראו שיש גם מעגל אדום שמשיק ל-4 ישרים.



4. בציור נתון שיש 15 מעגלים כחולים שכל אחד מהם משיק ל-4 ישרים, הראו שיש גם מעגל אדום שמשיק ל-4 ישרים.

5. בארבעון ABCD לוקחים כדור חסום וכדור חסום מבחוץ, שמשיק לפאה ABC ולהמשכי הפאות האחרות. נקודות ההשקה של הכדורים עם המישור ABC הם F ו-G. הוכיחו כי $\angle BAF = \angle CAG$.

6. במישור סומנו שלוש נקודות כחולות: A, B ו-C, ושתי נקודות אדומות: P ו-Q (אף 3 מהנקודות המסומנות לא על ישר אחד, ואף 4 לא על מעגל אחד). מעגל נקרא מפריד אם כל הנקודות בצבע אחד נמצאות בפנים, וכל הנקודות בצבע אחר נמצאות בחוץ. עבור המעגל החוסם של המשולש ABC, נסמן ב-O את מרכזו, וב-R את הרדיוס שלו. הראו כי מעגל מפריד לא קיים אם ורק אם קיימת נקודה X בקטע PQ שנמצאת גם בתוך המשולש ABC, המקיימת $PX \cdot XQ = R^2 - OX^2$.

7. נתונה קבוצה של נקודות אקראיות במישור. הוכיחו שקיים, ובסיכוי 1 גם יחיד, השילוש שמקיים:

- המשולשים מרצפים את הקמור של הנקודות הנתונות,
- כל הנקודות הנתונות הם הקודקודים של המשולשים,
- כל הקודקודים של המשולשים הם הנקודות הנתונות,
- העיגול החוסם (ללא השפה) של כל משולש לא מכיל אף אחת מהנקודות הנתונות.

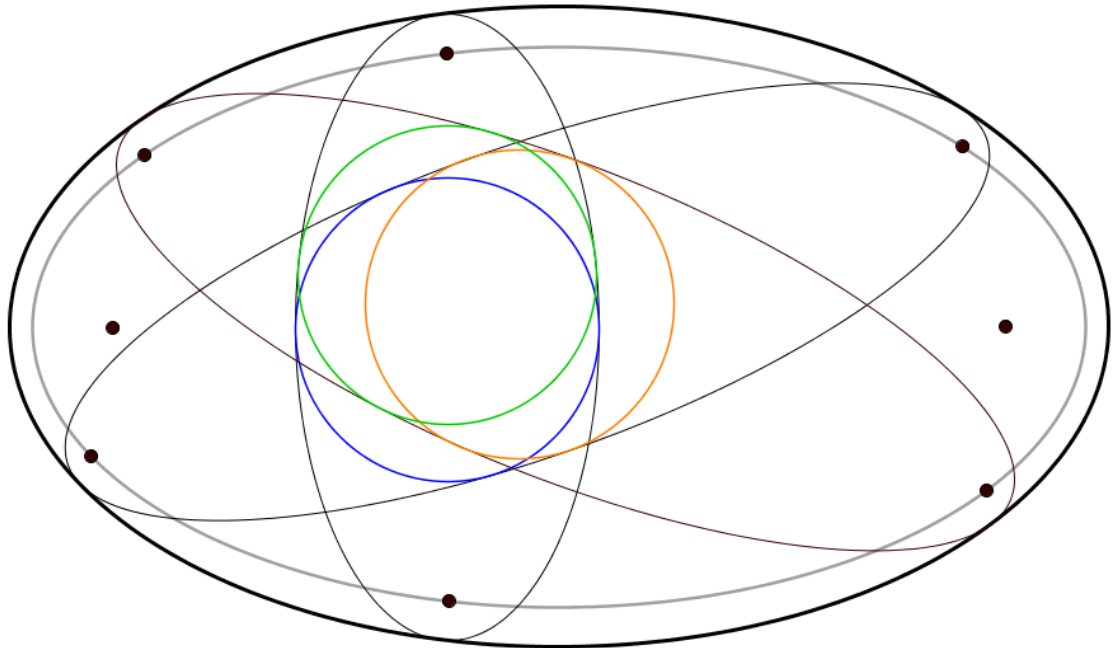
מצד שני, הוכיחו שקיים, ובסיכוי 1 גם יחיד, השילוש שמקיים:

- המשולשים מרצפים את הקמור של הנקודות הנתונות,
- כל הקודקודים של המשולשים הם הנקודות הנתונות,
- העיגול החוסם (עם השפה) של כל משולש מכיל את כל הנקודות הנתונות.

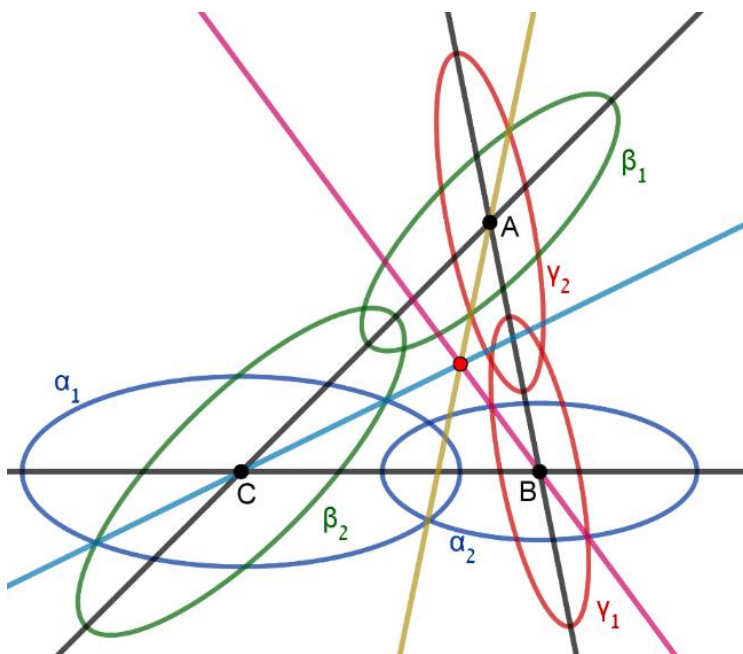
8. נגיד שמרחק מנקודה למעגל זה אורך המשיק. במישור נתונים שני מעגלים f_1 ו- f_2 , בנוסף נתון מספר ממשי k . הראו ללא חישוב שהמקומות הגיאומטריים של נקודות X עבורן $Xf_1 + Xf_2 = k$ או $|Xf_1 - Xf_2| = k$ הם שניוניות או מספר קטן של קשתות של שניוניות.

9. נגיד שפרבולה מחבקת מעגל, אם הפרבולה משיקה למעגל בשתי נקודות שונות. במישור צוירו 3 מעגלים שונים, ו-3 פרבולות שונות, כך שכל פרבולה מחבקת שני מעגלים. הוכיחו שקיים משיק משותף לכל שלוש הפרבולות.

10. בציור זה מופיעים 3 מעגלים (כחול, ירוק וכתום) ו-3 אליפסות $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ שמחבקות זוגות של מעגלים. בנוסף, יש כאן אליפסה גדולה E שמחבקת את $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. הראו שאם E מחבקת את ε_1 ומשיקה ל- ε_3 אז היא גם מחבקת את ε_2 . הראו שמוקדי $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ נמצאות על אליפסה, שיש לה מוקדים משותפים עם E.



11. נתון משולש ABC, ו-6 אליפסות: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$. הקודקוד A הוא מרכזן של האליפסות β_1



ו- γ_2 , הקודקוד B הוא מרכזן של האליפסות γ_1 ו- α_2 , והקודקוד C הוא מרכזן של האליפסות β_2 ו- α_1 . האליפסות α_1 ו- α_2 דומות וציר הסימטריה הארוך שלהן הוא לאורך הישר BC. זוגות אליפסות נוספות שהן באותו הצבע מקיימות תנאי דומה עבור צלעות מתאימות של המשולש ABC. בנוסף, לכל שתי אליפסות עם מרכז משותף הציר הארוך שווה.

בכל שתי אליפסות בעלות מרכז משותף חיברו שתי נקודות חיתוך בישר, כמו בציור. הוכיחו ששלושת הישרים שהתקבלו נחתכים בנקודה.

בתאבון!