

## פולינומים מתחלפים

הגדרה. פולינומים  $P, Q$  נקראים מתחלפים אם  $P \circ Q = Q \circ P$ .

### סוגיה א

1. הוכח כי לכל  $P \in \mathbb{C}[x]$  הפולינום  $P \circ P \circ P \circ \dots \circ P$  מתחלף עם הפולינום  $P$ .

2. הוכח כי שתי המשפחות הבאות הן משפחות של פולינומים מתחלפים:

$$P_n(x) = x^n \quad \text{א.}$$

$$\text{ב. פולינומי צ'בישוב: } \cos nx = P_n(\cos x).$$

3. נניח כי  $P \circ Q = Q \circ P$ , ובנוסף  $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  הוא  $T(x) = ax + b$ .

נגדיר  $P_1 = T^{-1} \circ P \circ T$ ,  $Q_1 = T^{-1} \circ Q \circ T$ . אז גם  $P_1, Q_1$  מתחלפים.

4. מצאו את כל הפולינומים שמתחלפים

$$\text{א. עם } Q(x) = x + b, \text{ כאשר } b \neq 0.$$

$$\text{ב. עם } Q(x) = ax + b, \text{ כאשר } a \neq 0.$$

$$\text{ג. עם } Q(x) = x^n, \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

5. מצאו את כל  $P, R \in \mathbb{C}[x]$ , עבורם  $P(x^n) = R(P(x))$  עבור  $n$  טבעי מסוים.

**שאיפות:** בהמשך התרגיל נפתח כלים שיעזרו להוכיח את הטענות הבאות:

**I.** סיווג כל המשפחות של פולינומים מתוקנים מכל הדרגות שמתחלפים בזוגות.

**II.** לכל  $m > 1$  טבעי, קיים  $P \in \mathbb{C}[x]$  מדרגה  $m$ , שלא מתחלף עם אף  $Q(x)$  עבורו

$$1 < \deg Q < m.$$

## סוגיה ב

1. הוכח כי לכל  $P \in \mathbb{C}[x]$  המקיים  $\deg P > 1$  קיים רק מספר סופי של  $Q \in \mathbb{C}[x]$  מדרגה  $\leq m$  שמתחלפים עם  $P$ . (עשו זאת בלי לבדוק מקדמים.)

מרגע זה הפולינומים שלנו יהיו מתוקנים (מקדם מוביל = 1).

2. הראו כי  $P \sim Q \Leftrightarrow P \circ Q = Q \circ P$  זה יחס שקילות עבור  $\deg > 1$ .

(למה זה לא מתקיים עבור פולינומים לא מתוקנים?)

3. הראו כי אם  $P \sim Q$ , וגם  $\deg P = \deg Q > 1$  אזי  $P = Q$ .

**הגדרה.** יהיה  $P$  פולינום מתוקן. נקרא לקבוצה  $\{ \deg Q \mid P \sim Q \}$  הספקטרום של  $P$ .

ברור כי אם  $\deg P = n$  אז  $1, n, n^2, n^3, \dots$  שייכים לספקטרום.

אם הספקטרום של  $P$  הוא  $\mathbb{N}$ , נגיד כי  $P$  פולינום מוצלח.

אם הספקטרום של  $P$  הוא  $\{1, n, n^2, n^3, \dots\}$ , נגיד כי  $P$  מפוסטן לגמרי.

4. הראו כי  $x^2, x^2 - 2$  הם פולינומים מוצלחים.

5. הראו כי אם  $x^2 - a$  מוצלח, אז  $a = 0, 2$ .

6. מצאו את כל הפולינומים המוצלחים מדרגה 2: כלומר מסוג  $x^2 + bx + c$  (לבדוק עבור  $\deg Q = 3$ ).

7. מצאו את כל הפולינומים המוצלחים.

8. הוכיחו שהספקטרום של פולינום  $P(x) = x^2 + 2$  מורכב ממספרים זוגיים (ו-1).

9. הראו כי הפולינום  $p(x) = x^2 - a$  מפוסטן לגמרי במקרים הבאים

א.  $a < 0$       ב.  $a > 2$       ג.  $0 < a < 1$

ד.  $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$       ה.  $a$  טרנסצנדנטי

10. הוכיחו כי לכל  $d > 1$  קיים פולינום מפוסטן לגמרי מדרגה  $d$ .

## סוגיה ג

1. הראו שאם פונקציה שלמה מתחלפת עם פולינום מדרגה גדולה מ-1, אז היא פולינום.

2. מצאו את כל הפונקציות  $f \in Hol(\mathbb{C} \setminus \{0\})$  שמתחלפות עם  $p(x) = x^n$ .