תרגיל אפיני

הקדמה

התרגיל הזה הוא על סוג מיוחד של העתקות שנקראות העתקות אפיניות. אתם מוזמנים לנסות להוכיח בעצמכם את הטענות בהקדמה, אבל אתם יכולים גם להאמין להן ולנסות לפתור את השאלות.

<u>הגדרה:</u> **העתקה אפינית** זו העתקה חח"ע ועל מהמישור לעצמו שמעבירה ישרים לישרים.

<u>דוגמאות:</u> סיבוב, הזזה, שיקוף, הומותטיה, מתיחה בכיוון מסוים (למשל $f(x,y)=(ax,y)$)

באופן כללי העתקה אפינית היא מהצורה $f(x,y)=(ax+by+c,dx+ey+f)$.

<u>תכונות של העתקות אפיניות:</u>

1. העתקה אפינית משמרת ישרים מקבילים וחיתוכים של ישרים
2. העתקה אפינית משמרת יחסים על ישרים מקבילים (כלומר אם שני קטעים מקבילים אז יחס האורכים שלהם הוא אותו דבר אחרי ההעתקה האפינית)
3. העתקה אפינית משמרת יחסים בין שטחים
4. העתקה אפינית נקבעת לפי 3 נק' שלא נמצאות על ישר אחד – כלומר אם A,B,C לא על ישר אחד ו-A',B',C' לא על ישר אחד אז *קיימת ויחידה* העתקה אפינית שמעבירה את A ל-A', B ל-B' ו-C ל-C'.

שאלות

1. על האלכסון AC של מקבילית $ABCD$ נבחרה נקודה P. הוכיחו כי $S_{ABP}=S_{ADP}$.
2. יהי $ABCD$ טרפז כך ש-$CD \parallel AB$. נסמן ב-E את החיתוך של AD,BC וב-F את החיתוך של AC,BD. הוכיחו כי EF חוצה את בסיסי הטרפז.
3. דרך כל קודקוד של משולש ABC הועברו שני ישרים המחלקים את הצלע הנגדית לשלושה חלקים שווים. הוכיחו כי הישרים שמחברים קודקודים נגדיים של המשושה הנוצר על ידי ישרים אלו נפגשים בנקודה אחת.
   <u>בונוס:</u> מה הנקודה הזו?
4. על הצלעות AB,AD של מקבילית $ABCD$ נבחרו נקודות X,Y בהתאמה. XY חותך את AC בנקודה Z. הוכיחו כי

$$\frac{AB}{AX}+\frac{AD}{AY}=\frac{AC}{AZ}$$

5. נתון טרפז $ABCD$ כך ש-$AD||BC$. הישר המקביל ל-CD דרך B חותך את האלכסון AC בנקודה P. הישר המקביל ל-AB דרך C חותך את האלכסון BD בנקודה Q. הוכיחו כי PQ מקביל לבסיס הטרפז.
6. על הצלעות AB, BC, CA של משולש ABC נבחרו נק' M, N, P בהתאמה כך שמתקיים
$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$$
הוכיחו כי מפגשי התיכונים במשולשים ABC, MNP והמשולש שנוצר מהישרים AM, BN, CP מתלכדים.
7. במשולש ABC, D היא עקב הגובה מ-A. תהי P נק' על AD. נסמן ב-E את החיתוך של BP עם AC וב-F את החיתוך של AP עם BC. הוכיחו ש-$\angle EDA = \angle FDA$.
8. על הצלעות AB, BC, CA של משולש ABC נבחרו נקודות M, N, P בהתאמה.
   a. נסמן ב-M_1, N_1, P_1 את הנקודות הסימטריות ל-M, N, P ביחס לאמצעי הצלעות המתאימות. הוכיחו כי $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$.
   b. על הצלעות AB, BC, CA נבחרו נקודות M_2, N_2, P_2 כך ש-$MM_2 \parallel AB, NN_2 \parallel BC, PP_2 \parallel CA$. הוכיחו כי $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$.
9. יהי מחומש קמור שבו כל אלכסון מקביל לאחת הצלעות. הוכיחו כי קיימת העתקה אפינית שמעבירה את המחומש למחומש משוכלל.
10. אמצעי האלכסונים AC, BD של מרובע קמור $ABCD$ יסומנו E, F בהתאמה. הישר המקביל ל-AC העובר ב-F והישר העובר ל-BD העובר ב-E נחתכים ב-P. הוכיחו כי הקטעים המחברים את P לאמצעי צלעות המרובע מחלקים אותו ל-4 מצולעים שווי שטח.
11. תהי P נקודה בתוך משולש ABC. נסמן את החיתוכים של AP, BP, CP עם הצלעות BC, CA, AB ב-M, N, K בהתאמה. יהיו Q, R, S השיקופים של P ביחס ל-M, N, K. הוכיחו שלא יכול להיות ששלושת השיקופים Q, R, S נמצאים בתוך המעגל החוסם של ABC.
12. נתון מרובע $ABCD$. נסמן את חיתוכי הצלעות הנגדיות ב-E, F. הוכיחו כי אמצעי AC, BD, EF על ישר.
13. נתון משושה שבו כל שתי צלעות נגדיות מקבילות. הוכיחו כי הישרים שמחברים את אמצעי הצלעות הנגדיות נפגשים בנקודה אחת.

הרצאה

הגדרה

<u>הגדרה</u>: העתקה אפינית זו העתקה חח"ע ועל מהמישור לעצמו שמעבירה ישרים לישרים.
<u>דוגמאות</u>: סיבוב, הזזה, שיקוף

האם יש עוד דוגמאות?
כן, למשל העתקה שמותחת רק בכיוון של ציר מסוים (נגיד $(x,y)\mapsto(4x,y)$).
עוד דוגמה זו ההעתקה $(x,y)\mapsto(x+y,y)$ שנקראת "shearing".

אפיון העתקות אפיניות

בוא ננסה להבין איך נראות העתקות אפיניות באופן כללי.
<u>הבחנה</u>: ישרים מקבילים עוברים לישרים מקבילים.
הסיבה היא שכמות נקודות החיתוך נשמרת, בגלל שההעתקה חח"ע ועל.
<u>מסקנה</u>: מקביליות עוברות למקביליות.
<u>מסקנה</u>: קטעים מקבילים באותו אורך עוברים לקטעים מקבילים באותו אורך. בניסוח אחר, **וקטורים עוברים לוקטורים**.
(כאן וקטור הוא הפרש בין שתי נקודות, ולא נקודה במישור בפני עצמה).
<u>מסקנה</u>: יחסים בין קטעים מקבילים נשמרים.
ההסבר הוא כזה: אם קטע אחד ארוך פי $n\in\mathbb{N}$ מקטע אחר, אז הקטע האחר נכנס בו n פעמים, ולכן היחס הזה נשמר גם אחרי ההעתקה. מכאן אפשר להסיק שכל יחס רציונלי נשמר, אבל הרציונליים צפופים בממשיים ולכן כל יחס ממשי נשמר.
<u>מסקנה</u>: אם ניקח שריג מקביליות, הוא עובר לשריג מקביליות אחר. [ציור]
מכאן כבר אפשר להבין איך נראית העתקה אפינית:
נסמן את ההעתקה ב-T. נבחר נקודה P ושני וקטורים u,v. אז לפי מה שהסברנו, ההעתקה נקבעת על ידי $T(P),T(u),T(v)$.
באופן מפורש, כל נקודה במישור היא מהצורה $X=P+au+bv$, ואז לפי מה שהסברנו התמונה שלה תהיה $T(X)=T(P)+aT(u)+bT(v)$.

בקואורדינטות, אם נבחר למשל $P=(0,0),u=(0,1),v=(1,0)$, אז נקבל שיש a,b,c,d,e,f כך שמתקיים $T(x,y)=(ax+by+c,dx+ey+f)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$. כלומר הוכחנו
משפט: כל העתקה אפינית היא מהצורה
$$T(x,y)=(ax+by+c,dx+ey+f)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$$

תכונות בסיסיות

כעת נרכז מספר תכונות בסיסיות של העתקות אפיניות שיכולות להיות שימושיות. את חלקן כבר ראינו.

מה העתקות אפיניות מכבדות? (כלומר מעבירה אובייקט מסוג מסוים לאובייקט מאותו סוג)

1. העתקה אפינית מכבדת ישרים מקבילים.
2. העתקה אפינית מכבדת פעולות בין וקטורים – $T(u+v)=T(u)+T(v), T(\lambda v)=\lambda T(v)$
3. העתקה אפינית מכבדת צורות דומות.

מה נשמר תחת העתקות אפיניות?

4. העתקה אפינית משמרת יחסים בין קטעים על ישר (או על ישרים מקבילים).
5. העתקה אפינית משמרת יחסים בין שטחים.

מה קובע העתקה אפינית?

6. העתקה אפינית נקבעת על ידי 3 נקודות שלא נמצאות על ישר אחד. כלומר אם A, B, C לא על ישר אחד ו-A', B', C' לא על ישר אחד אז **קיימת ויחידה** העתקה אפינית שמעבירה את A, B, C ל-A', B', C'.

הוכחות:

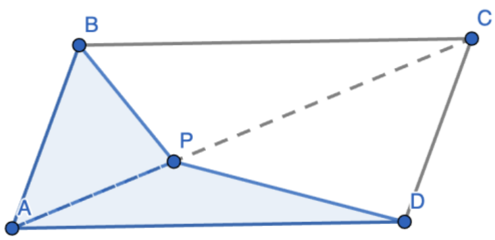
1-4 ראינו כבר / נובעים מדברים שראינו.

5: ניקח צורה כלשהי ונמלא אותה בריבועים קטנטנים מאותו גודל. השטח שלה הוא בערך כמות הריבועים כפול שטח הריבוע. אז התמונה שלה מרוצפת באופן טבעי על ידי מקביליות קטנטנות. היחס בין שטח ריבוע לשטח התמונה שלו הוא קבוע (לא תלוי בגודל הריבוע), ולכן זה היחס בין השטחים הממולאים. כשניקח גבול נקבל את יחס שטחי הצורות.

6: ההעתקה המדוברת זו העתקה שמעבירה את A ל-A', ואת הוקטורים $B-A, C-A$ לוקטורים $B'-A', C'-A'$: כפי שהסברנו זה מגדיר העתקה אפינית ביחידות, כלומר יש העתקה כזו (פשוט נבנה אותה לפי זה) והיא יחידה כי זה מספיק כדי לקבוע את התמונה של כל נקודה.

שאלות עם פתרונות

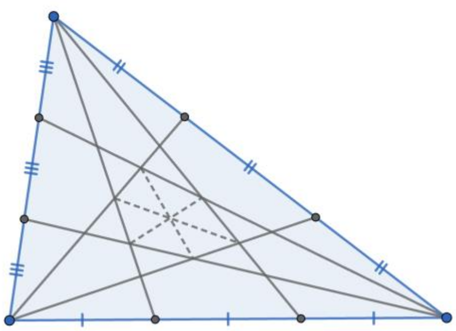
שאלה: על האלכסון AC של מקבילית $ABCD$ נבחרה נקודה P. הוכיחו כי $S_{ABP} = S_{ADP}$.



פתרון: נשים לב שמשום שהעתקה אפינית משמרת מקבילות ויחסי שטחים, נוכל להפעיל העתקה אפינית כרצוננו על השאלה ולקבל שאלה שקולה. אז נעשה העתקה אפינית שתעביר את $ABCD$ לריבוע (למשל נעביר את ABC ל-3 קודקודים של ריבוע ואז D יהיה חייב לעבור לקודקוד הרביעי). כעת הטענה ברורה מסימטריה. מש"ל.

שאלה: יהי $ABCD$ טרפז כך ש-$AB \parallel CD$. נסמן ב-E את החיתוך של AD, BC וב-F את החיתוך של AC, BD. הוכיחו כי EF חוצה את בסיסי הטרפז.

פתרון: נשים לב שמשום שהעתקה אפינית משמרת מקבילות ויחסים בין קטעים מקבילים, נוכל להפעיל העתקה אפינית ולקבל שאלה שקולה. נשים לב שאם הטרפז שווה שוקיים אז הטענה ברורה. אז נחפש העתקה אפינית שתעביר את הטרפז לטרפשו"ש - למשל אפשר להעביר את ABE למשולש שווה שוקיים.



שאלה: דרך כל קודקוד של משולש ABC הועברו שני ישרים המחלקים את הצלע הנגדית לשלושה חלקים שווים. הוכיחו כי הישרים שמחברים קודקודים נגדיים של המשושה הנוצר על ידי ישרים אלו נפגשים בנקודה אחת.

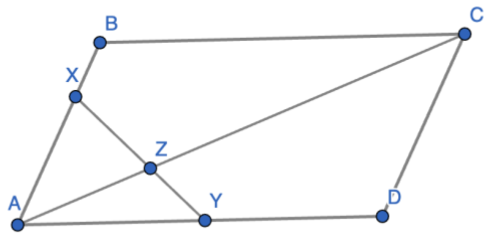
בונוס: מה הנקודה הזו?

פתרון: מכיוון שהעתקה אפינית משמרת יחסים בין קטעים מקבילים ומכבדת חיתוכים בין ישרים, נוכל להפעיל העתקה אפינית כרצוננו. נעביר את המשולש למשולש משוכלל והשאלה נהיית ברורה מסימטריה.

פתרון לבונוס: במקרה של משולש משוכלל, הנקודה הזו היא מרכז המשולש. למרכז יש הרבה הגדרות, אבל הגדרה אחת שרלוונטית להעתקות אפיניות היא מפגש תיכונים (או מרכז כובד), כי תיכונים עוברים לתיכונים בהעתקות אפיניות. לכן בכל משולש הנקודה הזו היא מפגש התיכונים.

שאלה: על הצלעות AB, AD של מקבילית $ABCD$ נבחרו נקודות X, Y בהתאמה. XY חותך את AC בנקודה Z. הוכיחו כי

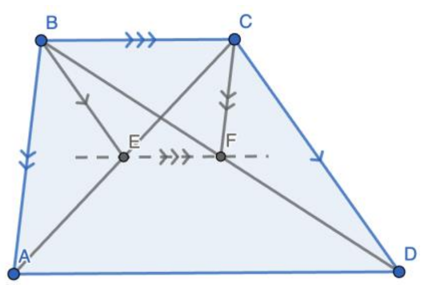
$$\frac{AB}{AX} + \frac{AD}{AY} = \frac{AC}{AZ}$$



פתרון: מכיוון שהעתקה אפינית משמרת מקבילות ויחסים בין קטעים מקבילים, נוכל להפעיל העתקה אפינית כרצוננו ולקבל שאלה שקולה. אז נפעיל את ההעתקה שתעביר את המקבילית לריבוע. כעת נוכל לחשב באנליטית בקלות:
נוכל להניח בה"כ שמתקיים $A=(0,0), B=(1,0), C=(0,1)$.
אז $X=(a,0), Y=(0,b)$ עבור a,b כלשהם. אפשר לחשב או לנחש את משוואת הישר XY: זה יוצא $bx+ay=ab$. החיתוך עם AC זו נקודה מהצורה $Z=(z,z)$, ולכן נוכל למצוא ש-$z=\frac{ab}{a+b}$. נשים לב שאפשר לחשב את היחסים הדרושים לפי קואורדינטת x למשל:

$$\frac{AC}{AZ}=\frac{1}{\frac{ab}{a+b}}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{AB}{AX}+\frac{AC}{AY}$$

מש"ל.



שאלה: נתון טרפז $ABCD$ כך ש-$AD||BC$. הישר המקביל ל-CD דרך B חותך את האלכסון AC בנקודה P. הישר המקביל ל-AB דרך C חותך את האלכסון BD בנקודה Q. הוכיחו כי PQ מקביל לבסיס הטרפז.

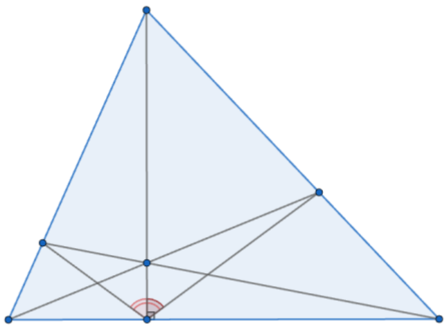
פתרון: גם כאן נעביר את הטרפז לטרפשו"ש והטענה תהיה ברורה מסימטריה, וברור שכל השאלה נשמרת תחת העתקות אפיניות כי יש כאן רק קווים מקבילים.

שאלה: על הצלעות AB, BC, CA של משולש ABC נבחרו נק' M, N, P בהתאמה כך שמתקיים

$$\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}$$

הוכיחו כי מפגשי התיכונים במשולשים ABC, MNP והמשולש שנוצר מהישרים AM, BN, CP מתלכדים.
פתרון: נעביר את ABC למשולש שווה צלעות. אז בגלל שהיחסים נשמרים ובגלל סימטריה, M, N, P עוברות לנקודות שעוברות אחת לשנייה תחת סימטריות סיבוביות של המשולש. בנוסף, מפגשי תיכונים עוברים למפגשי תיכונים (כי תיכונים עוברים לתיכונים). אז כל הציור סימטרי, ומפגשי התיכונים של כל המשולשים הנתונים הם אותה נקודה – מרכז המשולש.

שאלה: במשולש ABC, D היא עקב הגובה מ-A. תהי P נק' על AD. נסמן ב-E את החיתוך של BP עם AC וב-F את החיתוך של AP עם BC. הוכיחו ש-$\angle EDA=\angle FDA$.



פתרון: נעשה העתקה אפינית שמעבירה את P למפגש הגבהים של ABC. למה יש כזו? נסתכל על העתקות שמותחות/מכווצות את המישור רק בכיוון שמאונך ל-BC. כשמכווצים ממש הרבה, הזווית בין BP ל-AC מאוד קהה. אבל אם מותחים ממש הרבה היא נהיית חדה. לכן באמצע היא ישרה – כלומר BP גובה, אבל גם AP גובה ולכן P מפגש גבהים.
כעת בציור החדש, שוויון הזוויות די ברור כי יש זוויות ישרות ומעגלים. אבל נשים לב שביחס לכיוון המתיחה שלנו, הטענה נשמרת אפינית – הטענה היא שהישרים DE, DF סימטריים ביחס ל-DA. אם אנחנו מותחים רק בכיוון של DA, הסימטריות הזו נשמרת, ולכן מש"ל.

שאלה: על הצלעות AB, BC, CA של משולש ABC נבחרו נקודות M, N, P בהתאמה.

א. נסמן ב-M_1, N_1, P_1 את הנקודות הסימטריות ל-M, N, P ביחס לאמצעי הצלעות המתאימות. הוכיחו כי $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$.
ב. על הצלעות AB, BC, CA נבחרו נקודות M_2, N_2, P_2 כך ש-$MM_2 \parallel AB, NN_2 \parallel BC, PP_2 \parallel CA$. הוכיחו כי $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$.

פתרון:
<u>סעיף א'</u>: נעביר את המשולש למשולש שווה צלעות עם אורך צלע 1. אז הנק' מחלקות את הצלעות לזוגות קטעים באורכים $(x, 1-x), (y, 1-y), (z, 1-z)$. אז סכום שטחי ה"אוזניים" הוא:

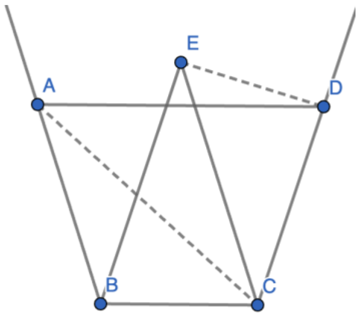
$$\big(x(1-y) + y(1-z) + z(1-x)\big) \cdot \frac{\sin(60°)}{2}$$

מצד שני, אחרי השיקופים נקבל

$$\big(x(1-z) + y(1-x) + z(1-y)\big) \cdot \frac{\sin(60°)}{2}$$

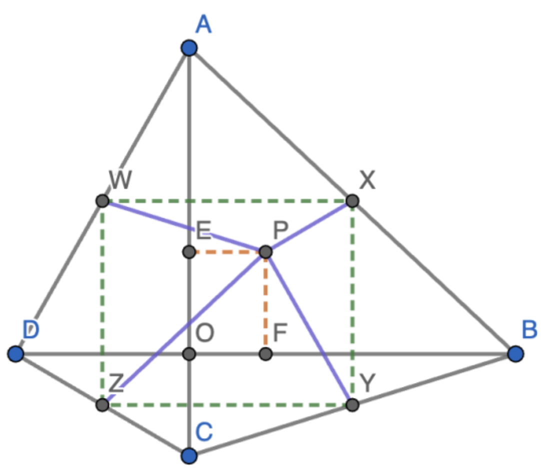
וקל לראות שהם שווים.
<u>סעיף ב'</u>: נעביר את המשולש למשולש משוכלל. נשים לב שאם נסובב אותו ב-$120°$ נקבל ש-P_2, M_2, N_2 בדיוק עוברות ל-P_1, M_1, N_1 מהציור הראשון. מש"ל
<u>הערה</u>: אפשר גם לחזור על החישוב.

שאלה: יהי מחומש קמור שבו כל אלכסון מקביל לאחת הצלעות. הוכיחו כי קיימת העתקה אפינית שמעבירה את המחומש למחומש משוכלל.
פתרון: כל צלע נוגעת ב-4 אלכסונים, אז היא יכולה להקביל רק לאלכסון אחד, האלכסון "הנגדי". ננסה בכוח להעביר את המחומש למחומש משוכלל – נעביר 3 צלעות סמוכות להיות ככה



שהכיוונים שלהם זה הכיוונים של 3 צלעות סמוכות של מחומש משוכלל (זה אפשרי כי אפשר להשלים את ה"אוזן" ולקבוע את ההעתקה לפיה). נגיד שהצלעות האלה הן AB, BC, CD. נשים לב שהאלכסון AD חייב להקביל ל-BC ולכן נקבל ש-$ABCD$ טרפשו"ש. בנוסף, האלכסונים BE, CE מקבילים ל-AB, CD בהתאמה וזה קובע אותם, ולכן הנקודה E נקבעת והיא באמת הקודקוד החמישי של המחומש. לכן מה שנותר להראות זה שהאלכסון AD בגובה הנכון.
אבל נשים לב שאם נזיז את AD מ-BC כלפי מעלה, האלכסון CA ו-ED מסתובבים בכיוונים הפוכים, ובהינתן טווח התנועה שלהם ייתכן רק מיקום אחד בו האלכסונים CA, ED יוצאים מקבילים – אבל אנחנו יודעים שזה קורה במחומש משוכלל, לכן זה חייב להיות בדיוק המצב. מש"ל

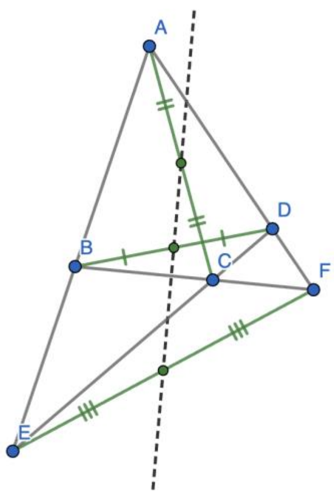
שאלה: אמצעי האלכסונים AC, BD של מרובע קמור $ABCD$ יסומנו E, F בהתאמה. הישר המקביל ל-AC העובר ב-F והישר העובר ל-BD העובר ב-E נחתכים ב-P. הוכיחו כי הקטעים המחברים את P לאמצעי צלעות המרובע מחלקים אותו ל-4 מצולעים שווי שטח.



פתרון: נעביר את האלכסונים להיות מאונכים. נסמן את אמצעי הצלעות AB, BC, CD, DA ב-X, Y, Z, W בהתאמה. נשים לב שהישרים XY, YZ, ZW, WX מקבילים לאלכסונים (כי הם קטעי אמצעים) ולכן נקבל שהמרובע $XYZW$ הוא מלבן.
נסמן ב-O את מפגש האלכסונים. אז A, B הם השיקופים של O ביחס לצלעות XW, YZ של המלבן. אם נעשה הומותטיה פי חצי נקבל את ההיטלים של O על הצלעות, שהאמצע שלהן הוא בגובה של אמצע המלבן. לכן E שהיא אמצע AB היא הנקודה הסימטרית ל-O ביחס לציר הסימטריה האופקי של המלבן. באופן דומה F סימטרית ל-O ביחס לציר האנכי, ולכן P סימטרית ל-O ביחס למרכז המלבן.
נסתכל על אחד מהמרובעים בשאלה, נגיד $PXBY$. נשים לב שהשטח BXY הוא בדיוק השטח EXY (כי X, Y, E אמצעי צלעות של ABC). אבל מסימטריה במלבן זה בדיוק כמו OXY. בנוסף מסימטריה של המלבן השטח של PXY זה השטח של OWZ. קל לראות ש-$S_{OWZ} + S_{OXY} = \frac{1}{2} S_{XYZW}$ ולכן כל שטחי המרובעים הם חצי משטח המלבן ובפרט השטחים שווים, מש"ל.

שאלה: (2019G4) תהי P נקודה בתוך משולש ABC. נסמן את החיתוכים של AP, BP, CP עם הצלעות BC, CA, AB ב-M, N, K בהתאמה. יהיו Q, R, S השיקופים של P ביחס ל-M, N, K. הוכיחו שלא יכול להיות ששלושת השיקופים Q, R, S נמצאים בתוך המעגל החוסם של ABC.

פתרון: ניזכר שאם P הייתה מפגש הגבהים, אז Q, R, S היו על המעגל החוסם. אז נעשה העתקה שתעביר את P למפגש הגבהים. אבל עכשיו במקום מעגל חוסם יש לנו אליפסה חוסמת, נסמן אותה ב-α. יש לנו גם את המעגל החוסם Ω, ש-Q, R, S עליו. המעגל החוסם והאליפסה הם שתי שניוניות, ולכן יש להן 4 נקודות חיתוך (במרוכבים), ובממשיים 0 או 2 או 4. אבל כבר יש להן 3 נקודות חיתוך (A, B, C), אז חייבת להיות עוד אחת. נניח לה"כ שהיא על הקשת BC, ונקרא לה X. אז לה"כ הקשת BX של האליפסה מחוץ למעגל החוסם, XC בתוך, CA מחוץ ו-AB בתוך. בפרט S על המעגל החוסם אבל מחוץ לאליפסה החוסמת, כלומר בציור המקורי היא מחוץ למעגל החוסם.

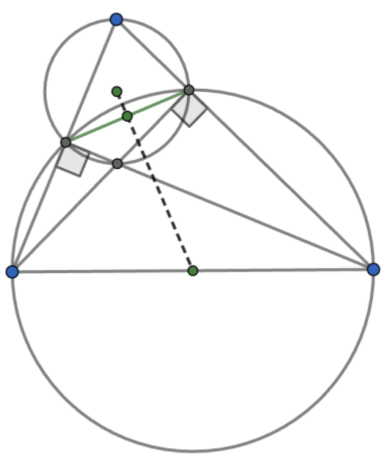


שאלה: נתון מרובע $ABCD$. נסמן את חיתוכי הצלעות הנגדיות ב-E, F.
הוכיחו כי אמצעי AC, BD, EF על ישר.

פתרון:
כרגיל, הכל נשמר תחת העתקות אפיניות. נחפש העתקה אפינית שתעשה את הציור יותר יפה – נגיד, אם אלה היו גבהים במשולש, אז היינו מקבלים כל מיני מעגלים וזה נראה מבטיח.

<u>למה</u>: כל 4 נק' X, Y, Z, W ניתן להעביר בהעתקה אפינית למצב כך ש-W הוא מפגש הגבהים של XYZ (שימו לב שזה תנאי סימטרי – זה אומר ש-$XY \perp ZW$ וכו').

<u>הוכחת הלמה</u>: נעביר את XY להיות מאונך ל-ZW. כבר עשינו שליש דרך. עכשיו נמתח את המישור בכיוון של ZW ונסתכל על הזווית בין XW ל-YZ. אם ממש נקרב את W ל-XY זו תהיה זווית מאוד קהה, אבל אם נרחיק אותו מאוד זו תהיה זווית מאוד חדה. לכן איפשהו באמצע זו תהיה זווית ישרה, ונסיים.



<u>המשך פתרון השאלה</u>: אז יש לנו משולש AEF ש-C מפגש הגבהים שלו. אז יש מעגלים $ABCD, BEDF$ שהקטרים שלהם הם AC, EF. בפרט אמצע AC ואמצע EF הם מרכזי המעגלים. מצד שני, חיתוך המעגלים הוא B, D. כלומר צריך להראות ששני מרכזי המעגלים ואמצע הקטע שמחבר את נקודות החיתוך הם על ישר אחד – וזה טריוויאלי.

שאלה: נתון משושה שבו כל שתי צלעות נגדיות מקבילות. הוכיחו כי הישרים שמחברים את אמצעי הצלעות הנגדיות נפגשים בנקודה אחת.

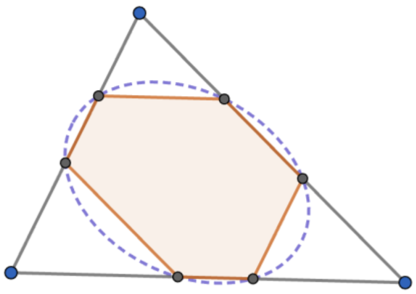
פתרון ראשון: נקרא למשושה $ABCDEF$. ננסה להפוך את הציור ליותר סימטרי. נשים לב שנוכל להעביר את $ABDE$ וגם את $BCEF$ לטרפשו"שים בהעתקה אפינית אחת. דרך אחת לראות את זה היא כזאת – כדי ש-$ABDE$ צריך שישר האמצעים $M_{AB}M_{DE}$ יהיה מאונך ל-AB. זה קל לסדר (למשל נעביר את $AM_{AB}M_{DE}$ למשולש ישר זווית). עכשיו בשביל הטרפשו"ש השני ננסה ש-$M_{BC}M_{EF}$ יהיה

מאונך ל-BC. נשתמש בטריק שעשינו כבר כמה פעמים של למתוח בכיוון המאונך ל-AB ולהשתמש ברציפות.
אחרי שהגענו למצב שהם מאונכים, יש לנו שני טרפשו"שים $ABDE, BCEF$. אז מתקיים $CF = BE$ בגלל $BCEF$ ו-$BE = AD$ בגלל $ABDE$ ולכן $AB = CF$ ולכן $CDFA$ טרפשו"ש.
בפרט נקבל שיש לנו שלושה מעגלים $ABDE, BCEF, CDFA$ והצירים הרדיקליים שלהם הם AD, BE, CF ולכן הם נפגשים בנקודה אחת. אבל בכל טרפשו"ש, האלכסונים שלו הם שניים מהישרים האלה ולכן נחתכים על ציר הסימטריה שלו, כלומר על ישר אמצעי הבסיסים. בפרט נק' החיתוך המשותפת לכל האלכסונים היא על ישר הבסיסים של כל הטרפזים – מש"ל.

פתרון שני: לפי משפט פסקל, המשושה חסום בשניונית (כי החיתוכים של זוגות צלעות נגדיות הם על ישר אחד – ישר האינסוף). נניח רגע שהיא אליפסה – אז נעביר אותה למעגל, ואז בגלל שכל זוג צלעות נגדיות הן מקבילות הישר בין האמצעים שלהן עובר באמצע המעגל, וסיימנו.
אם היא לא אליפסה אז אפשר לתקן את את הטיעון אבל זה קצת יותר מורכב (למשל אפשר לעשות העתקה שתעביר את ההיפרבולה למעגל פשוט במרוכבים, או לטעון שהכל אלגברי).

<u>הערה</u>: בעצם קיבלנו שהישרים נפגשים במרכז האליפסה. זה קשור לטענה הבאה – באליפסה (או בשניונית כללית), אם נעביר מיתרים מקבילים אז כל האמצעים שלהם על ישר. (אפשר גם להראות שהישר הזה עובר במרכז האליפסה). זה נקרא משפט אפולוניוס, ובמקרה של אליפסה, אפשר להוכיח את זה עם העתקה אפינית למעגל. במקרה הכללי אפשר גם להוכיח עם משפט ויאטה.
מהטענה הזו אפשר גם להוכיח את השאלה בלי ההעתקה האפינית בסוף – בגלל שיש אליפסה, ובגלל משפט אפולוניוס, הישרים הנתונים עוברים במרכז האליפסה.

פתרון 2.5: יש דרך קצת יותר מסורבלת להראות שהמשושה חסום בשניונית, אבל היא מלמדת למה שלפעמים שימושית:
<u>למה</u>: נתון משולש A, B, C, ונתונות נקודות A_1, A_2 על BC, B_1, B_2 על AC, C_1, C_2 על AB. אז $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ על שניונית אחת אמ"מ $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{AC_2}{C_2B} = 1$ (מכפלת יחסי צ'בה).
<u>הוכחת הלמה</u>: דרך כל 5 נקודות עוברת שניונית, אז ניקח שניונית דרך A_1, A_2, B_1, B_2, C_1. נעביר אותה למעגל בהעתקה אפינית*. נגדיר את C_2' להיות החיתוך הנוסף של המעגל עם AB. מצד שני, תנאי היחסים מגדיר את C_2 ביחידות – אז אם נוכיח ש-C_2' מקיים את היחס, נסיים.
אבל נשים לב שבגלל שזה מעגל, יש לנו דרגות נקודה – אז ביטוי כמו $CA_1 \cdot CA_2$ מצטמצם עם $CB_1 \cdot CB_2$, וכל השאר מצטמצם.
*זה למעשה עובד רק אם זה אליפסה. אפשר להראות שאם הנקודות הן בתוך הצלעות אז זה חייב להיות אליפסה. אפשר גם לסדר את הטיעון למקרה הכללי יותר, למשל אפשר לטעון שזו טענה אלגברית ולכן אם היא נכונה על קבוצה פתוחה היא נכונה תמיד.



<u>המשך פתרון השאלה</u>: אם נמשיך שלוש צלעות של המשושה נקבל ציור כזה, ונשים לב שבגלל הישרים המקבילים מכפלת היחסים בלמה יוצאת 1, ולכן יש לנו אליפסה.