

# תומבי

1. נתונים 20 מספרים טבעיים שונים שקטנים מ-70. הוכיחו כי מבין הפרשים של זוגות מספרים נתונים יש לפחות ארבעה הפרשים זהים.
2. הוכיחו כי מבין המספרים  $0, 1, 2, \dots, 3^k - 1$  ניתן לבחור  $2^k$  כך שאף מספר שבחרנו לא יהיה שווה לממוצע החשבוני של שני מספרים שנבחרו?
3. הראו שמבין כל 39 מספרים עוקבים יש מספר שסכום ספרותיו מתחלק ב-11.
4. נתונים  $d_1, \dots, d_9$  שלמים שונים. נתבונן בפולינום
$$P(x) = (x + d_1) \cdot \dots \cdot (x + d_9)$$
הוכיחו כי קיים שלם  $N$  כך שלכל שלם  $N \leq x$  המספר  $P(x)$  מתחלק בראשוני שגדול מ-20.
5. עבור שלם חיובי  $n$  נסמן ב- $f(n)$  את השלם החיובי הקטן ביותר שיש לו בדיוק  $n$  מחלקים (לדוגמה  $f(1) = 1, f(5) = 16, f(6) = 12$ ). הוכיחו כי  $f(2^k) | f(2^{k+1})$ .
6. נתונה סדרה של שלמים חיוביים שסכומם 2019. ידוע שכל המספרים בסדרה שונים מ-40, וגם סכומה של כל קבוצת מספרים רצופה בסדרה שונה מ-40. מהי הכמות הגדולה ביותר של מספרים שיכולים להיות בסדרה?
7. נתון מספר טבעי  $N$ . הוכיחו כי קיימת כפולה של  $N$  שסכום ספרותיה אי-זוגי.
8. הוכיחו כי קיים  $n > 1000$  כך שסכום הספרות של  $2^n$  גדול מסכום הספרות של  $2^{n+1}$ .
9. במעגל רשומים  $n \geq 2$  מספרים שלמים שסכומם לא מתחלק ב- $n$ . מצאו את כל ה- $n$ ים עבורם ניתן למצוא נקודה על המעגל כך שכל הקשתות שמתחילות בנקודה זו והולכות עם כיוון השעון עוברות על מספרים שסכומם לא מתחלק ב- $n$ .
10. נקרא למספר תשע-ספרתי יפה, אם כל ספרותיו שונות. הראו שקיימים לפחות א. 1000 ב. 5000 ג. 20,000 מספרים יפים שמתחלקים ב-37.
11. לכל ראשוני  $p$  נבנה גרף  $G_p$  שקודקודיו מתאימים ל- $\{1, \dots, p\}$  ושני קודקודים  $m \neq n$  מחוברים בקשת אם ורק אם  $p | (m^2 - n + 1)(n^2 - m + 1)$ . הוכיחו כי  $G_p$  לא קשיר עבור אינסוף  $p$ -ים שונים.
- ב. הוכיחו כי יש אינסוף  $p$ -ים עבורם ב- $G_p$  יש רכיב קשירות מגודל 2.
12. קבוצה  $S$  של מספרים שלמים תקרא שורשנית אם לכל שלם חיובי  $n$  ולכל  $a_0, a_1, \dots, a_n \in S$ , כל השורשים השלמים של הפולינום  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  גם שייכים ל- $S$ . מצאו את כל הקבוצות השורשניות אשר מכילות את כל המספרים מהצורה  $2^a - 2^b$  עבור  $a, b$  שלמים חיוביים.