חצי-אינווריאנטים

1. נתון כביש מדברי שצורתו ישר עם תחנות עצירה בנקודות שלמות. לוקח יום אחד להגיע ברגל מתחנה לתחנה הבאה. בן אדם מסוגל לסחוב 3 מנות יומיות של אוכל. אפשר להשאיר את מנות האוכל רק בתחנות. הבסיס נמצא בנקודה 0. רוצים לארגם משלחת, שתשאיר מנה יומית של אוכל בתחנה החמישית, ושכולם יחזרו הביתה. כמה מנות יומיות של אוכל צריך להקצות למשימה זאת?

2. במישור נתונות N נקודות אדומות ו-N נקודות כחולות במצב כללי. הוכח שאפשר לזווג אותן באמצעות N קטעים שלא נחתכים זה עם זה.

3. על קו ישר יש שורה של בתים, אינסופית לשני הכיוונים. בבתים אלה גרים 100 מוזיקאים (יכולים להיות מספר מוזיקאים באותו בית). בכל יום עלול לקרות אחד משני דברים:

א. *שני מוזיקאים שגרים בבתים* N ו-$N+1$ *מחליטים שהם מפריעים זה לזה, ועוברים לגור בבתים* $N-1$ ו-$N+2$.

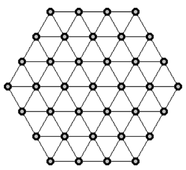
ב. *שני מוזיקאים שגרים בבית מספר* N *מחליטים שהם מפריעים זה לזה, ועוברים לגור בבתים* $N-1$ ו-$N+1$.

הוכח שכעבור זמן מה מעברי הדירה יפסקו.

4. נתון לוח משבצות אינסופי. בכל משבצת של חצי המישור התחתון נמצא חייל. בכל מהלך חייל קופץ מעל חייל סמוך (לפי צלע) למרחק של שתי משבצות ואוכל אותו.

האם אפשר להעביר חייל כלשהו לשורה העשירית מעל חצי המישור שבו הם נמצאים בהתחלה?

5. א. בכל משבצת של לוח 8×8 גר שבט של עובדי אלילים. מיסיונר ממיר מספר שבטים לנצרות. אם לשבט יש שני שכנים (לפי צלע) שכבר הומרו, אז השבט עובר לנצרות באופן אוטומטי. מהו המספר המזערי של שבטים שהוא צריך להמיר בשביל שכל השבטים יעברו לנצרות?



ב. יש רשת מחשבים בצורת משושה עם אורך צלע n, המחולק למשולשים שאורך הצלעות שלהם 1. בקודקודי הרשת נמצאים מחשבים. אם ליד מחשב כלשהו (במרחק 1 ממנו) יש 3 מחשבים נגועים בווירוס, אז גם למחשב הזה חודר וירוס. מהו המספר המזערי של מחשבים בהם צריך להתקין וירוס, כך שהוא יגיע לכל המחשבים?

6. בארץ מסוימת, שבה כל האנשים נחמדים (רחוקה מאוד) יש שתי מפלגות. כל האנשים חיים לנצח ואף פעם לא מחליפים חברים. בכל בחירות כל אחד מהאזרחים מצביע כמו שרוב החברים שלו הצביעו בפעם הקודמת. אם יש לו אותה כמות של חברים שהצביעו בשביל שתי המפלגות, אז הוא מצביע כמו שהוא הצביע קודם. הוכח שכעבור זמן מה כל איש יצביע כמו שהוא הצביע לפני שנתיים.

(רמז: נסו לפתור קודם גרסה פשוטה של השאלה - אנשים מחליפים דעה פוליטית לדעה של רוב חבריהם ברגעים שונים ולא בו-זמנית.)

7. יש $\frac{N(N+1)}{2}$ אנשים, שמחולקים למספר קבוצות. בכל מהלך בוחרים נציג מכל קבוצה, מוציאים אותם מהקבוצות שלהם, ויוצרים קבוצה נוספת שמכילה אותם. הוכח שאחרי כמות מספיק גדולה של מהלכים יהיו N קבוצות בגודל 1, 2, 3, ... , N.

8. נתון לוח. בכל פעולה ניתן או לרשום עליו שני אחדים או למחוק ממנו שני מספרים זהים n שכבר כתובים עליו ולרשום במקומם את המספרים $n-1$ ו-$n+1$. מהו המספר הקטן ביותר של פעולות כאלה שיש לבצע על מנת לקבל את המספר 2005? (בהתחלה הלוח ריק.)

9. N חרגולים יושבים על הישר הממשי, לא כולם בנקודה אחת. חרגול יכול לקפוץ מנקודה A לנקודה C מימין ל-A אם יש חרגול נוסף בנקודה B על הקטע AC כך ש-$AB = k\cdot BC$. לאילו ערכי k יוכלו החרגולים להגיע רחוק כמה שירצו?

10. על לוח משבצות בגודל 1000×1000 נצבעו k משבצות. המשבצות נחשבות שכנות אם יש להן צלע משותפת. בכל פעם תום מוצא משבצת שלפחות 3 משכנותיה צבועות וצובע גם אותה. בסוף המשחק הלוח כולו צבוע. מהו ה-k המינימלי האפשרי?

11. במעגל רשומים N מספרים ממשיים שסכומם חיובי. בכל מהלך בוחרים רצף של מספרים $a\quad b\quad c$ שהאמצעי מהם שלילי והופכים אותם לרצף $a+b\quad -b\quad b+c$.

הוכח שהתהליך יסתיים אחרי מספר סופי של מהלכים. האם כמות המהלכים תלויה בסדר הפעולות?

12. בתוך מצולע קמור בעל N צלעות נבחרו N נקודות שונות.

א.* הוכח שיש זיווג בין הנקודות לבין הצלעות כך שהקמור של כל נקודה והצלע שלה הם N משולשים זרים.

ב.** הוכח שיש זיווג בין הנקודות לבין הצלעות כך שהקמור של כל נקודה והצלע שלה הם N משולשים שמכסים את המצולע.

בתיאבון!