השיטה ההסתברותית

הגדרת התוחלת: יהי X משתנה מקרי המקבל ערכים בקבוצה (סופית) S, התוחלת של X מוגדרת באופן הבא:

$$E[X]=\sum_{x\in S}\left(x\cdot P(X=x)\right)$$

התוחלת לינארית: $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$.

אי שוויון מרקוב: עבור X משתנה מקרי המקבל ערכים אי-שליליים מתקיים ש-

$$P(X\geq c)\leq\frac{E[X]}{c}$$

אי שוויון צ'בישב. השונות של משתנה מקרי X מודגרת להיות

$$Var(X)=E((X-E[X])^2=E[X^2]-E[X]^2$$

אי שוויון צ'בישוב טוען שלכל קבוע ממשי חיובי λ מתקיים:

$$P(|X-EX|\geq\lambda)\leq\frac{Var(X)}{\lambda^2}$$

ציור. נתונים m,n שלמים חיוביים ו-p,q ממשיים חיוביים שסכומם אחד. הוכיחו ש-

$$(1-p^n)^m+(1-q^m)^n\geq 1$$

נקודות שבת. נתבונן בקבוצת התמורות על n איברים, חשבו את כמות נקודות השבת הכוללת.

חסר סכומים. קבוצת מספרים A תקרא חסרת סכומים אם לכל $a_1,a_2\in A$ הסכום שלהם לא ב-A.

תהי $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ קבוצת מספרים שלמים חיוביים, הוכיחו כי קיימת ל-X תת קבוצה A מגודל $\frac{n}{3}$ לפחות כך ש-A חסרת סכומים.

איזון וקטורים. יהי $v_1,v_2,\ldots,v_n$ וקטורי יחידה ב-$\mathbb{R}^n$. ניתן לבחור סימנים $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n=\pm1$ כך ש-

$$|\epsilon_1v_1+\ldots+\epsilon_nv_n|\leq\sqrt{n}$$

ובנוסף ניתן לבחור סימנים $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n=\pm1$ כך שיתקיים

$$|\epsilon_1v_1+\ldots+\epsilon_nv_n|\geq\sqrt{n}$$

טורן. יהי גרף חסר k-קליקות על n קודקודים. אזי

$$|E|\leq\frac{k-2}{k-1}\frac{n^2}{2}$$

שאלות:

1. נתבונן בקבוצת התמורות על n איברים, נסמן ב-x_k את כמות התמורות עם k נקודות שבת. חשבו את

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k$$

2. בארץ התיכונה גרים אלפים וגמדים, לכל גמד יש לפחות אלף אחד שהוא חבר שלו. הוכיחו כי ניתן לבחור קבוצה המכילה לפחות מחצית מאוכלוסיית האלפים והגמדים כך שלכל גמד קבוצה תהיה כמות אי-זוגית של אלפים חברים בקבוצה.

3. במישור סומנו n נקודות כך שאף שלוש לא על ישר אחד. עבור כל מצולע קמור P עם קודקודים בנקודות המסומנות נסמן ב-$a(P)$ את כמות הקודקודים שלו וב-$b(P)$ את כמות הנקודות המסומנות מחוץ ל-P. הוכיחו כי לכל מספר ממשי x

$$\sum_{P} x^{a(p)} \cdot (1-x)^{b(p)} = 1$$

כאשר הסכום רץ על כל המצולעים המשוכללים עם קודקודים בנקודות המסומנות.
הערה: קטע, נקודה והקבוצה הריקה נחשבים מצולעים קמורים עם $0,1,2$ קודקודים בהתאמה.

4. משפחה $\mathcal{F}$ של קבוצות נקראת נחתכת אם לכל $A, B \in \mathcal{F}$ $A \cap B \neq \emptyset$. נניח ש-$n \geq 2k$ ו-$\mathcal{F}$ משפחה נחתכת של תתי קבוצות בגודל k של $\{1, \dots, n\}$. אזי

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$$

הסתברותית למתקדמים

חסם צ'רנוף. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים שמקבלים ערכים ב-$\{-1,1\}$. יהי $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, אזי לכל $\lambda > 0$ מתקיים ש-

$$P\left(S_n \geq \lambda\sqrt{n}\right) \leq es^{-\lambda^2/2}$$

סכומים שונים. נגיד שלקבוצה $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ של שלמים חיוביים יש סכומים שונים אם כל הסכומים

$$\sum_{i \in S} x_i \qquad ,S \subseteq X$$

שונים. יהי k המספר המקסימלי עבורו קיימת תת קבוצה מגודל k של $\{1, \ldots, n\}$ שהיא חסרת סכומים.

ברור ש-$k \geq 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$. הוכיחו כי

$$n \geq \frac{2^{k+1} - 3}{3\sqrt{3k}}$$

או במילים אחרות ש-

$$k \leq \log_2 n + \log_2 \log_2 n + O(1)$$

קרובים של וירשטראס. תהי $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים פולינום $p(x)$ כך ש-$|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon$ לכל $x \in [0,1]$.

הרדי רמנוג'אן. נסמן ב-$v(n)$ את כמות המחלקים הראשוניים של n (ללא ריבוי). לכל $\varepsilon > 0$ קיים קבוע c כך שכל המספרים ב-$\{1, \ldots, n\}$ למעט מ-εn מקיים ש-

$$|v(x) - \log\log n| \leq C\sqrt{\log\log n}$$

שאלות:

1. תהי A קבוצה של n שאריות מודלו n^2. הוכיחו כי קיימת קבוצה B של n שאריות מודולו n^2 כך שלפחות מחצית מהשאריות מודולו n^2 מוכלות ב-$A+B$.

2. יהיו $a,b,c>0$ ממשיים עבורם $\lfloor an\rfloor+\lfloor bn\rfloor=\lfloor cn\rfloor$ לכל n טבעי. הוכיחו כי לפחות אחד מבין a,b,c שלם.

3. הוכיחו כי קיים קבוע חיובי c עבורו לכל n שלם חיובי ולכל על-מישור ב-$\mathbb{R}^n$ שעובר בראשית לפחות $c\cdot 2^n$ מספירות יחידה עם מרכזים ב-$\{-1,1\}^n$ חותכות את המישור.

4. תהי $\mathcal{F}$ משפחה של m תתי קבוצות של $\{1,\dots,n\}$ כך שכל קבוצה מכילה לכל היותר s איברים. כל איבר של $\{1,\dots,n\}$ יצבע בכחול או אדום. לכל $X\in\mathcal{F}$ נגדיר את *ההפרשיות* של X להיות הערך המוחלט של ההפרש בין כמות האיברים הכחולים לכמות האיברים האדומים ב-X. ההפרשיות $\mathcal{F}$ היא ההפרשיות המקסימלית של קבוצה ב-$\mathcal{F}$. הוכיחו כי ניתן לבחור את הצביעה של $\{1,\dots,n\}$ כך שההפרשיות של $\mathcal{F}$ לא תעלה על $\left\lfloor 2\sqrt{sln(2m)}\right\rfloor$.

5. נתונים מספרים מרוכבים $z_1,\dots,z_n$ כך ש-

$$\sum_{i=1}^{n}|z_i|=1$$

הוכיחו כי ניתן למצוא $S\subset[n]$

$$\left|\sum_{i\in S}z_i\right|\geq\frac{1}{\pi}$$