הסתברות

1. בארץ התיכונה גרים אלפים וגמדים, לכל גמד יש לפחות אלף אחד שהוא חבר שלו. הוכיחו כי ניתן לבחור קבוצה המכילה לפחות מחצית מאוכלוסיית האלפים והגמדים כך שלכל גמד בקבוצה תהיה כמות אי-זוגית של אלפים חברים בקבוצה.

2. הוכיחו כי ניתן לצבוע את המספרים השלמים בין 1 ל-2020 ב-4 צבעים כך שלא תיווצר סדרה חשבונית מונוכרומטית באורך 10.

3. תהי A קבוצה של n שאריות מודלו n^2. הוכיחו כי קיימת קבוצה B של n שאריות מודולו n^2 כך שלפחות מחצית מהשאריות מודולו n^2 מוכלות ב-$A+B$.

4. על מעגל סומנו 432 נקודות במרווחים שווים. 108 מהנקודות אדומות, 108 כחולות, 108 ירוקות ו-108 כתומות. הוכיחו כי ניתן לבחור 3 נקודות מכל צבע כך שארבעת המשולשים המונוכרומטיים שמתקבלים יהיו חופפים.

5. במישור סומנו n נקודות כך שאף שלוש לא על ישר אחד. עבור כל מצולע קמור P עם קודקודים בנקודות המסומנות נסמן ב-$a(P)$ את כמות הקודקודים שלו וב-$b(P)$ את כמות הנקודות המסומנות מחוץ ל-P. הוכיחו כי לכל מספר ממשי x

$$\sum_P x^{a(p)} \cdot (1-x)^{b(p)} = 1$$

כאשר הסכום רץ על כל המצולעים הקמורים עם קודקודים בנקודות המסומנות.
הערה: קטע, נקודה והקבוצה הריקה נחשבים מצולעים קמורים עם 0,1,2 קודקודים בהתאמה.

6. יהי $n \geq 2$ שלם ו-$x_1, \dots, x_n$ מספרים ממשיים עבור מתקיים

$$x_1 + \dots + x_n = 0, \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

לכל תת קבוצה A של $\{1, \dots, n\}$ נגדיר

$$S_A := \sum_{i \in A} x_i$$

הוכיחו כי לכל $\lambda > 0$ מספר תתי הקבוצות A עבורן $S_A \geq \lambda$ הוא לכל היותר $\frac{2^{n-3}}{\lambda^2}$.

7. יהי $n \geq 2$ שלם ו-$a_1, a_2, \dots, a_n$ שלמים חיוביים. הראו שקיימים $b_1, \dots, b_n$ שמקיימים את שלושת התנאים:
א. $a_i \leq b_i, \forall 1 \leq i \leq n$.
ב. שאריות החלוקה של $b_1, \dots, b_n$ ב-n שונות בזוגות.
ג. $b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq n\left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \right\rfloor\right)$.

8. יהיו $a, b, c > 0$ ממשיים עבורם $\lfloor an \rfloor + \lfloor bn \rfloor = \lfloor cn \rfloor$ לכל n טבעי. הוכיחו כי לפחות אחד מבין a, b, c שלם.

9. משפחה $\mathcal{F}$ של קבוצות נקראת נחתכת אם לכל $A,B\in\mathcal{F}$ $A\cap B\neq\emptyset$. נניח ש-$n\geq 2k$ ו-$\mathcal{F}$ משפחה נחתכת של תתי קבוצות בגודל k של $\{1,\dots,n\}$. אזי

$$|\mathcal{F}|\leq\binom{n-1}{k-1}$$

10. הוכיחו כי קיים קבוע חיובי c עבורו לכל n שלם חיובי ולכל על-מישור ב-$\mathbb{R}^n$ שעובר בראשית לפחות $c\cdot 2^n$ מספירות יחידה עם מרכזים ב-$\{-1,1\}^n$ חותכות את המישור.

11. יהיו $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$ וקטורים שלמים במישור. ידוע ש-

$$|x_1|,|y_1|,|x_2|,|y_2|,\dots,|x_n|,|y_n|\leq\frac{2^{\frac{n}{2}}}{100\sqrt{n}}$$

הוכיחו שניתן למצוא I,J, שתי תתי קבוצות זרות של $\{1,\dots,n\}$ כך שיתקיים

$$\sum_{i\in I}(x_i,y_i)=\sum_{j\in J}(x_j,y_j)$$

12. תהי $\mathcal{F}$ משפחה של m תתי קבוצות של $\{1,\dots,n\}$. כל איבר של $\{1,\dots,n\}$ יצבע בכחול או אדום. לכל $X\in\mathcal{F}$ נגדיר את *ההפרשיות* של X להיות הערך המוחלט של ההפרש בין כמות האיברים הכחולים לכמות האיברים האדומים ב-X. ההפרשיות $\mathcal{F}$ היא ההפרשיות המקסימלית של קבוצה ב-$\mathcal{F}$. הוכיחו כי ניתן לבחור את הצביעה של $\{1,\dots,n\}$ כך שההפרשיות של $\mathcal{F}$ לא תעלה על $\left\lfloor 2\sqrt{nln(m)}\right\rfloor$.

13. על הלוח רשומים 68 זוגות של מספרים שלמים שונים מ-0. ידוע שלכל k רק אחד מבין הזוגות $(k,k),(-k,-k)$ יכול להופיע. תלמיד מוחק חלק מ-136 המספרים הרשומים על הלוח, תחת התנאי שאף שני מספרים שנמחקו לא נסכמים ל-0. התלמיד מקבל נקודה על כל זוג שבו לפחות מספר אחד נמחק. מצאו את כמות הנקודות המקסימלית שיכול התלמיד לקבל ללא תלות בזוגות הרשומים על הלוח.
הערה: 68 הזוגות לא חייבים להיות שונים כלומר זוג יכולים לחזור יותר מפעם אחת.

14. נתונים מספרים מרוכבים $z_1,\dots,z_n$ כך ש-

$$\sum_{i=1}^{n}|z_i|=1$$

הוכיחו כי ניתן למצוא $S\subset[n]$

$$\left|\sum_{i\in S}z_i\right|\geq\frac{1}{\pi}$$