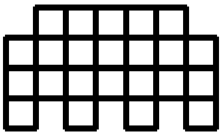
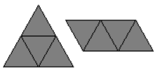
צביעות



1. מהו המספר המרבי של אבני דומינו שניתן להניח על גבי לוח המשבצות שבציור מבלי שיעלו זו על זו? כל אבן דומינו תופסת שתי משבצות סמוכות.

2. בתמונה מצויר לוח משולשי המורכב מ-64 תאים משולשיים. מנסים לרצף אותו באמצעות המרצפות הנתונות. כל תא משולשי חייב להיות מכוסה על ידי מרצפת אחת בדיוק. כל מרצפת מכסה 4 תאים בדיוק, וצורתה חייבת להיות משולש או מקבילית (חופפת לאחת הדוגמות).

מהי הכמות הקטנה ביותר של מרצפות בצורת משולש שיכולה להיות בריצוף?



3. על לוח שח מתנהל משחק. ברגע מסוים על כל שורה מונחים מספר אי-זוגי של כלים, ועל כל עמודה מונחים מספר אי-זוגי של כלים. האם יתכן שעל המשבצות הלבנות מונחים מספר אי-זוגי של כלים?

4. א. אילו זוגות של משבצות ניתן להוציא מלוח שח, כל שיהיה אפשר לרצף אותו בדומינו?

ב. איזו משבצת ניתן להוציא מלוח שח, כך שיהיה ניתן לרצף אותו במלבנים 1×3?

ג. איזו משבצת ניתן להוציא מלוח שח, כך שיהיה ניתן לרצף אותו באמצעות צורות פינתיות של 3 משבצות?

5. א. האם פרש יכול לעבור על כל המשבצות של לוח $4\times n$ פעם אחת בדיוק עבור $n\geq 8$?

ב. האם פרש יכול לעבור על כל המשבצות של לוח $4\times n$ פעם אחת בדיוק ולחזור למשבצת ממנה התחיל את תנועתו?

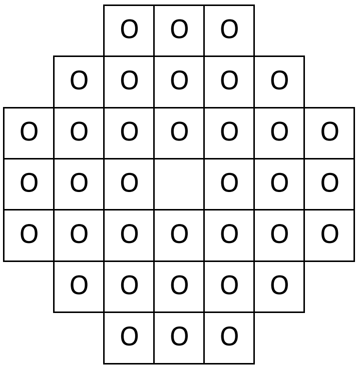
6. משבצות לוח 9×9 נצבעו ב-2 צבעים: אדום ולבן. הוכיחו כי קיימת משבצת, שיש לה בדיוק שני שכנים לפי פינה בצבע לבן או בדיוק שני שכנים לפי פינה בצבע אדום או גם וגם.

7. נתון לוח 12×20. בכל מהלך r-ג'ירפה יכולה לעבור ממשבצת למשבצת, אם המרחק בין מרכזי המשבצות הוא $\sqrt{r}$. כך למשל, סוס הוא בעצם 5-ג'ירפה. המשימה היא לעבור מהמשבצת הפינתית לפינה האחרת שנמצאת ליד אותה צלע ארוכה של הלוח כמו הפינה המקורית. האם המשימה אפשרית עבור

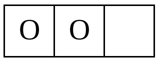
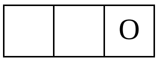
א. איזשהו r שמתחלק ב-2 או 3 ? **ב.** $r=73$? **ג.** $r=97$?

8. א. לוח 100×100 צבוע ב-4 צבעים, כך שבכל תת-ריבוע 2×2 יש את כל הצבעים. הוכיחו כי פינות הלוח צבועים בצבעים שונים.
ב. לוח 99×99 צבוע ב-9 צבעים, כך שבכל תת-ריבוע 3×3 יש את כל הצבעים. הוכיחו כי פינות הלוח צבועים בצבעים שונים.

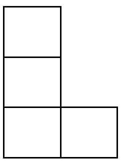
9. נתון לוח $n\times n$, שבהתחלה צבעו אותו בצביעת שח רגילה (משבצת א1 שחורה). בכל שלב, בוחרים תת-ריבוע 2×2 ומשנים את צבעי המשבצות שלו לפי הכלל הבא: שחור הופך ללבן, לבן הופך לירוק וירוק הופך לשחור. עבור אילו ערכי n ניתן להגיע לצביעת שח הפוכה?



10. נתון משחק (התמונה בציור).
בכל צעד של המשחק חייל (O) יכול לקפוץ מעל חייל אחר למשבצת ריקה במאוזן או במאונך, החייל שמעליו קפצו מוסר מהלוח.

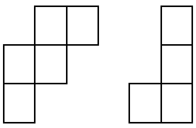
(לדוגמא  הופך ל- )

הראו שבסוף המשחק נשארים לפחות 2 חיילים, ושאם נשארים שני חיילים, אז ריבוע המרחק בין מרכזי המשבצות שעליהן הם מונחים מתחלק ב-9.

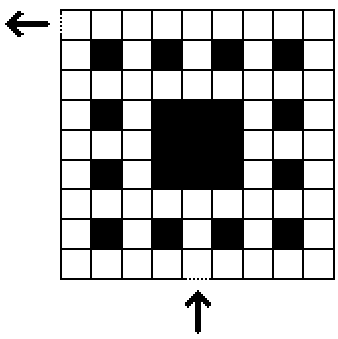


11. על לוח משבצות 7×5 סומנה משבצת אדומה. רוצים לכסות את הלוח באמצעות צורות של 4 משבצות (כמו בציור) כך שלצורות אסור להכיל משבצת משותפות פרט למשבצת האדומה. עבור איזה בחירה של משבצת אדומה זה אפשרי?

12. על לוח משבצות 9×9, נצבעו באדום 46 משבצות. הוכיחו כי קיים תת-לוח 2×2 בו יש לפחות 3 משבצות אדומות.



13. האם אפשר לחתוך ריבוע 7×7 לחלקים שכל אחד מהם חופף לאחת מהצורות שבציור?



14. בציור מצוירת מפה של מוזיאון, שבה כל משבצת לבנה מסמנת חדר. בין כל שני חדרים סמוכים ישנה דלת. בנה מסלול העובר במספר מירבי של חדרים, מתחיל בכניסה ומסתיים ביציאה, אבל לא עובר באף משבצת פעמים.

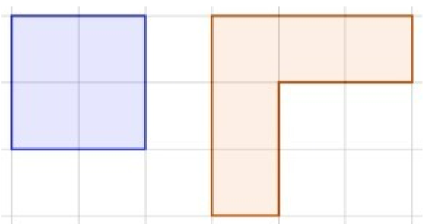
15. גמל הוא כלי שח שזז (ותוקף) 3 משבצות בשורה או בעמודה ומשבצת אחת במאונך (כלומר גמל הוא 10-ג'ירפה). כמה גמלים אפשר לשים על לוח שח 8×8 כך שהם לא יאיימו אחד על השני?

16. נתון ריבוע 9×9 כל משבצת יכולה להיות שחורה או לבנה. בכל מהלך ניתן להפוך את כל המשבצות בשורה כלשהי לפי בחירה, או בעמודה, או בריבוע 3×3. בתחילת המשחק כל המשבצות שחורות.

א. הראו שלא ניתן להגיע למצב שיש בדיוק משבצת שחורה אחת.

ב. עבור איזה K חיובי קטן ביותר, ניתן להגיע למצב בו יש בדיוק K משבצות שחורות?

17. האם אפשר לחלק מלבן 53×109 למלבנים, שחלק מהם מלבנים אנכיים 1×2 והאחרים הם מלבנים אופקיים 1×3 ?



18. האם ניתן לרצף באמצעות צורות שבציור את הריבוע 25×25 ?

19. על כל משבצת של לוח משבצות רשום מספר שלם. בכל מהלך מותר לבחור ריבוע 3×3 או 4×4 ולהגדיל את כל המספרים בו ב-1. המטרה היא להגיע למצב שכל המספרים יתחלקו ב-10. האם תמיד ניתן להשיג את המטרה

א. עבור לוח 8×8 ?

ב. עבור לוח 10×10 ?

20. א. כמה תיבות $4\times 1\times 1$ ניתן להכניס לקופסה $6\times 6\times 6$ כך שהפאות של הקופסה יהיו מקבילים לפאות של התיבות, אבל התיבות יכולות להיות מכוונות בכל אחד מ-3 הכיוונים האפשריים (לאורך, לרוחב ולעומק) ?

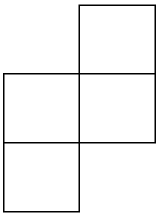
ב. נסחו ופתרו שאלה דומה למרחב 4-מימדי ($1\times 1\times 1\times 4$ בתוך $6\times 6\times 6\times 6$) ולמימדים גבוהים יותר.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

21. א. על משבצות של לוח 10×10 נמצאים אבנים, בהתאם לכמויות שרשומות בטבלה. בכל מהלך מותר בכל תור לבחור 3 משבצות ברצף באותה שורה או באותה עמודה, ולהוציא אבן אחת מכל אחת מבין 3 המשבצות (כמובן, על מנת לעשות מהלך כזה חייבים שיהיו אבנים בכל 3 המשבצות). מהי הכמות המינימלית של האבנים שיכולו להישאר בסוף המשחק?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

ב. שאלה דומה עבור טבלה 5×5 שכמויות האבנים במשבצות מ-1 2עד 25 לפי עקרון דומה.



22. כמה צורות מהסוג שמוצג בציור, שכל אחד מהן מכה 4 משבצות של הלוח (מותר לסובב ולשקף) ניתן להכניס מלבן שגודלו:

א. $n\times(2m+1)$,

ב. 6×6,

ג. 8×8,

ד. 10×10.

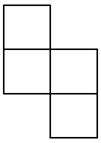
ה**. 20×20.

23. נתון ריבוע לבן בגודל 5×5. בכל מהלך מותר להפוך צבע (מלבן לשחור ומשחור ללבן) של משבצת ביחד עם כל השכנים (לפי צלע). רוצים להפוך משבצת אחת לשחורה ולהשאיר את שאר הריבוע לבן. עבור איזו משבצת זה אפשרי?

24. נתון ריבוע לבן בגודל 4×4. בכל מהלך מותר להפוך צבע (מלבן לשחור ומשחור ללבן) של משבצת ביחד עם כל השכנים (לפי צלע). רוצים להפוך שתי משבצות לשחורות ולהשאיר את שאר הריבוע לבן. עבור איזו משבצת זה אפשרי?

25. נתון לוח לבן בגודל $n\times n$, מותר להפוך צבע של ריבועים בגודל $k\times k$. כמה צביעות שונות של הלוח ניתן לקבל? לאילו n,k ניתן לקבל צביעת שח?

26. לוח $n\times n$ צבוע בצביעת שח, מותר להפוך צבע של 3×1. לאילו n אפשר לקבל לוח לבן. מה עם $n\times m$?

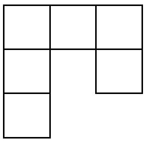


27. מצולע מרוצף באמצעות S-טטרומינו (כמו בציור, מותר לסובב אבל לא לשקף). הראו כי בכל ריצוף של המצולע על ידי S-טטרומינו ו-Z-טטרומינו (שזה שיקוף של S טטרומינו), צורות מסוג Z מופיעות מספר זוגי של פעמים.

28. מצאו את כל השלמים החיוביים n עבורם ניתן למלא כל תא של טבלה $n\times n$ באותיות O, M, I כך ש-

- בכל שורה ובכל עמודה, בדיוק בשליש מהתאים מופיע I, בשליש מופיע M, ובשליש – O.
- בכל אלכסון שמספר התאים שלו מתחלק ב-3, בשליש מהתאים מופיע I, בשליש מופיע M, ובשליש – O.

הערה. בטבלה יש $4n-2$ אלכסונים.



29. נגדיר קרס: צורה של 6 משבצות שמופיע בציור (מותר גם לסובב ולשקף). איזה טבלאות $m\times n$ ניתן לכסות בעאמצעות קרסים שלא נחתכים?

30. האם ניתן לכתוב בדף משבצות אינסופי אותיות I, M ו-O - אות בכל משבצת – כך שבכל מלבן 3×4 (או 4×3) יהיו 3 אותיות O, 4 אותיות M ו-5 אותיות I ?

31. נתונה קובייה $(2n+1)\times(2n+1)\times(2n+1)$ שמחולקת לקוביות $1\times1\times1$ ותיבות מהצורה $1\times2\times2$. מהו מספרי המינימלי של קוביות $1\times1\times1$ שיכולות להיות?

32. רוצים לארוז $2n(2n+1)$ תיבות בגודל $1\times2\times(n+1)$ בקופסה קובייתית עם מקצועות באורך $2n+1$. הפאות של התיבות צריכות להיות מקבילות לפאות הקופסה. עבור אילו ערכי n זה אפשרי?

33. n-ומינו הוא צורה קשירה המורכבת מ-n משבצות. נתון לוח משבצות אינסופי. עבור אילו ערכי n שלם חיובי קיים n-ומינו וקיימת צביעה של לוח המשבצות בשחור ובלבן, כך שבכל דרך שנניח את ה-n-ומינו על הלוח הוא יכסה מספר זוגי של משבצות שחורות, אך בכל דרך שנניח את תמונת המראה שלו על הלוח היא תכסה מספר אי-זוגי של משבצות שחורות?

ניתן להזיז את הצורות ולסובב אותן בכפולות של 90°, אך לא לשקף.