חתך הכי גדול של ארבעון

1. הראו שכל חתך של ארבעון (פירמידה משולשת) הוא משולש או מרובע.

2. הוכיחו שכל חתך משולשי של ארבעון אינו עולה בשטחו על פאה מסוימת.

3*. הוכיחו שכל חתך של ארבעון (אפילו מרובעי) קטן בשטחו מפאה מסוימת.

המשך הדף הוא בעיקר רמזים לשני פתרונות שונים לשאלה 3.

4. הוכיחו את משפט מנלאוס התלת-מימדי: אם ABCD ארבעון, ונקודות P, Q, R, T נמצאות על המקצועות AB, BC, CD, DA אז התנאי ההכרחי והמספיק לכך שהנקודות P, Q, R, T יהיו על מישור אחד הוא $\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{CR}{DR}\cdot\frac{DT}{AT}=1$.

5. הוכיחו שאם ארבע הצלעות של מרובע מרחבי משיקים לקליפה כדורית, אז כל נקודות ההשקה נמצאות במישור אחד.

רעיון להוכחה ראשונה נטיל את נקודות A, B, C, D על מישור החתך PQRT באמצעות הטלה אנכית. אז נקבל שמרובע PQRT חסום במרובע A'B'C'D' ובנוסף מתקיים "תנאי מנלאוס". נניח שנקודות P, Q, R, T מחלקות את הצלעות המתאימות של המרובע ביחסים $\alpha:(1-\alpha)$, $\beta:(1-\beta)$, $\gamma:(1-\gamma)$, $\delta:(1-\delta)$.

נניח בנוסף ששטחי המשולשים A'B'C', A'B'D', B'C'D', A'C'D' הם S_1, S_2, S_3, S_4 בסדר שתבחרו. נניח שהמינימלי ביניהם הוא $S_{\min}$ והמקסימלי $S_{\max}$.

6. א. רשמו באמצעות $\alpha,\beta,\gamma,\delta,S_1,S_2,S_3,S_4$ את הביטויים עבור $S_{PB'Q}, S_{QC'R}, S_{RD'T}, S_{TA'P}$.

ב. הוכיחו כי $S_{PQB'}+S_{QRC'}+S_{RTD'}+S_{TPA'}\geq S_{\min}$.

ג. הסיקו מכאן שכל חתך מרובעי של פירמידה קטן בשטחו מהפאה הגדולה ביותר שלה.

7. במשולש ABC שבו $AB\neq AC$ מעבירים מהקודקוד A תיכון באורך m, חוצה זווית באורך ℓ, וגובה באורך h. הוכיחו כי $h<\ell<m<\frac{AB+AC}{2}$.

8. במרובע ABCD נקודה O היא נקודת חיתוך של AC ו-BD. מעבירים דרך O קטעים PQ שמתחילים על צלע AB ומסתיימים על צלע CD. האורך של PQ תלוי בזווית שבה מעבירים את הישר PQ. הוכיחו כי אורך של PQ זו פונקציה קמורה של הזווית.

9. בארבעון ABCD ניקח חתך מלבני PQRT. נסובב את המישור מסביב לישר PR. הוכיחו כי השטח המרבי יתקבל כאשר החתך יתנוון לחתך משולשי.

בתיאבון

חתך הכי גדול של תיבה

1. הוכיחו כי חתך של קובייה זה מצולע קמור בעל 6 צלעות לכל היותר.

2. הוכיחו שאם חתך עובר דרך המרכז אז מספר הצלעות זוגי.

3. הוכיחו שאם לפאון סימטריה מרכזית, אז מספיק לקחת מישורים דרך מרכזו.

4. ליד כל פאה של פאון מציירים וקטור, שמאונך לפאה, מסתכל החוצה מהפאון ואורכו שווה לשטח הפאה (לפעמים קוראים לווקטור כזה וקטור נורמל). הוכח שסכום הווקטורים שמתאימים לכל הפאות שווה לווקטור האפס.

5. הוכיחו שאם חתך של קובית יחידה הוא מרובע ועובר דרך מרכז הקובייה אז שטחו קטן או שווה ל- $\sqrt{2}$. כמו כן, חתך מרובעי של תיבה $a\times b\times c$ אינו עולה על $c\cdot\sqrt{a^2+b^2}$ כאשר $c\ge b\ge a$.

ובכן, נשאר להבין את המקרה של חתך שעובר דרך המרכז והוא משושה.

6. נניח כי בקוביית יחידה ABCDKLMN העבירו חתך דרך המרכז שחותך את מקצוע AB ביחס $u:(1-u)$, את מקצוע BC ביחס $v:(1-v)$, את מקצוע CM ביחס $w:(1-w)$.

א. בטאו את השטח של החתך באמצעות u, v, w.

ב. הוכיחו שמתקיים אילוץ: $uvw=(1-u)(1-v)(1-w)$.

7. א. נניח כי ABC משולש שווה צלעות שכל צלעותיו הן באורך 1. על צלעותיו בחלק הפנימי נבחרו נקודות P, Q, R במצב של משפט צ'בה: AP, BQ, CR נפגשים.

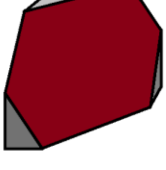
מתי מתקבל המקסימום של $\left(S_{\text{AQPB}}\right)^2+\left(S_{\text{ARPC}}\right)^2+\left(S_{\text{BRPC}}\right)^2$?

ב. למה סעיף א' שקול לשאלה על חתכי קוביה? מה צריך לשנות בניסוח כדי לטפל גם במקרה היותר כללי של תיבה?

8. במשולש מסוים נתונים x, y, z - הקטעים של הצלעות בין קודקודי של משולש לנקודות ההשקה עם המעגל החסום. בטאו את $\cos\frac{\alpha}{2},\ \cos\frac{\beta}{2},\ \cos\frac{\gamma}{2}$ (כאשר α,β,γ הם גדלי זוויות המשולש והם לא נתונים).

9*. נניח כי $\alpha,\beta,\gamma\ge 0$, ובנוסף $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, ובנוסף $0<A<B<C$. הוכיחו כי

$A^2(\cos\alpha)^4+B^2(\cos\beta)^4+C^2(\cos\gamma)^4\le B^2+C^2$.



בתאבון!