

מרכז מסה

הגדרה: נגיד שנתונים לנו נקודות A_1, \dots, A_n , ומקדמים m_1, \dots, m_n (לאו דווקא חיוביים ובהמשך גם לאו דווקא ממשיים) שנקראים מסות.

- א. סכום המקדמים $M = m_1 + \dots + m_n$ נקרא המסה הכוללת.
ב. אם המסה הכוללת לא מתאפסת אז $G = \frac{m_1 A_1 + \dots + m_n A_n}{M}$ נקרא מרכז המסה.

תכונות חשובות:

א. חוק הקיבוץ לחישוב מרכז כובד: אם מורידים חלק מהנקודות מהרשימה ומחליפים אותן במרכז הכובד שלהם, שמסתו היא המסה הכוללת של הנקודות שירדו, אז מרכז הכובד של המערכת לא ישתנה.

ב. חוק המנוף: מרכז המסה של שתי נקודות A_1, A_2 נמצא על הישר שמחבר אותן ומתקיים: $\frac{A_1 G}{G A_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

ג. מרכז מסה לא תלוי בבחירת מערכת צירים.
כלומר אם יש שתי מערכות צירים שונות במישור (או במרחב), ונחשב את מרכז המסה במערכת הראשונה ובמערכת השנייה, נקבל את אותה הנקודה הגיאומטרית.

ד. אם A ו- B זוג נקודות שונות, כל נקודה על הישר AB אפשר לקבל כמרכז מסה של A ו- B (כאשר בוחרים מסות בצורה נכונה).

אם A, B ו- C הן שלוש נקודות לא על ישר אחד, כל נקודה במישור ABC אפשר לקבל כמרכז מסה שלהן.

אם A, B, C ו- D הן ארבע נקודות שלא נמצאות על מישור אחד, כל נקודה במרחב אפשר לקבל כמרכז מסה שלהן.

ה. בקודקודי משולש A, B, C מציבים מסות m_A, m_B, m_C , ומרכז מסה יסומן G .
הראו כי $(S_{BCG} : S_{CAG} : S_{ABG}) = (m_A : m_B : m_C)$.

הכלילו את הטענה האחרונה לארבעון במרחב!

מרכז מסה

1. בארבעון ABCD מסמנים את אמצעי הצלעות, וכל שני אמצעים של צלעות נגדיות מחברים בקו ישר. הראו כי הישרים שנוצרים נפגשים בנקודה אחת.

2. על צלעותיו BC, AC, AB של המשולש ABC נמצאות נקודות P, Q, R בהתאמה. הישרים AP, BQ, CR הן צלעות של משולש ששטחו s , והשטח של ABC הוא S .

א. בהנחה כי $\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = 2$, מצאו את $\frac{s}{S}$.

ב.* באופן כללי, בטאו את $\frac{s}{S}$ באמצעות $w = \frac{AR}{RB}$, $u = \frac{BP}{PC}$, $v = \frac{CQ}{QA}$.

3. במרובע ABCD אמצעי הצלעות AB ו-CD הם M ו-N, ונקודות P ו-Q נמצאות על הצלעות BC ו-AD בהתאמה כך ש- $BP:PC = AQ:QD = r$. הוכיחו כי MN עובר דרך אמצע PQ, וכי PQ מחלק את MN ביחס r .

4. א. במשולש ABC מעגלים משיקים מבחוץ נוגעים בצלעות המשולש בנקודות T_A, T_B, T_C (לא בהמשכי הצלעות). הוכיחו כי AT_A, BT_B, CT_C נפגשים בנקודה אחת. נקודה זו נקראת נקודת נאגל ומסומנת ב"כ N.

ב. הראו שנקודת נאגל של משולש האמצעים היא מרכז המעגל החסום במשולש המקורי.
ג. המעגל החסום במשולש ABC חותך את הקטע AT_A בשתי נקודות, הנקודה הקרובה יותר ל-A תסומן Q_A . הראו כי $AQ_A = NT_A$.

5. במקבילית ABCD נבחרו נקודות P ו-Q על הצלעות AB ו-BC כך ש- $AP = CQ$. הוכיחו כי AQ, CP , וחוצה הזווית פנימי של הזווית D של המקבילית נפגשים בנקודה אחת.

6. פאון יקרא טרנזיטיבי, אם לכל שני קודקודים שלו A, B קיימת העתקה שומרת מרחקים שמעבירה את A ל-B, וכל קודקוד של הפאון יעבור לקודקוד של אותו הפאון. הוכיחו כי את הפאון הזה אפשר לחסום בכדור.

7. (IMO 1999) מצאו את כל קבוצות הנקודות S במישור בעלות התכונה: לכל שתי נקודות ב-S, האנך האמצעי של הקטע שמחבר אותן מהווה ציר סימטריה של S.

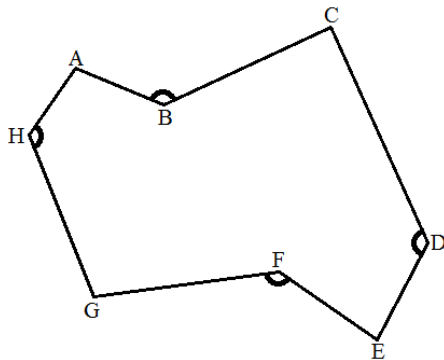
8. במשולש ABC על הצלעות AC ו-BC נבחרו נקודות פנימיות Q ו-P בהתאמה. הקטעים AP ו-BQ נפגשים בנקודה X. מצאו את הערך המרבי האפשרי של $\frac{S_{PXQ}}{S_{ABC}}$?

מסות מרוכבות

9. על הצלעות של משולש ABC בונים כלפי חוץ משולשים A_1BC , AB_1C , ABC_1 , כך ש- $ABC_1 \sim CAB_1 \sim BCA_1$. הראו כי מרכז מסה של ABC מתלכד עם מרכז מסה $A_1B_1C_1$.

10. נרשום $ABC \approx DEF$ אם המשולשים לא רק דומים, אלה גם מכוונים באותה צורה. הראו שאם במישור נתונות נקודות Z, Y, X, C, B, A המקיימות $ABZ \approx ACY \approx BCX$.

הראו כי $BXYZ$ מקבילית.



11. במתומן $ABCDEFGH$ מתקיים

$$360^\circ - \angle B = \angle D = 360^\circ - \angle F = \angle H$$

ובנוסף $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{CD} = \frac{EF}{FG} = \frac{AH}{GH}$. הוכיחו כי

$BDFH$ מקבילית.

12. נתון משולש שכל זוויותיו שונות. יוסי ודני משחקים במשחק הבא. בכל מהלך יוסי מסמן נקודה אחת במישור, ודני צובע את הנקודה באדום או בכחול לפי בחירתו. יוסי מנצח אם קיימות שלוש נקודות שהוא סימן ודני צבע, שיוצרות משולש שדומה למשולש המקורי וכולו בצבע אחיד. מה המספר המינימלי של מהלכים שיוסי צריך כדי לנצח בוודאות (לכל משולש מקורי)?