

שטח וליניאריות

1. א. בתוך משולש משוכלל ABC נמצאת נקודה P. הראו כי סכום המרחקים מנקודה P לצלעות המשולש שווה לגובה המשולש.

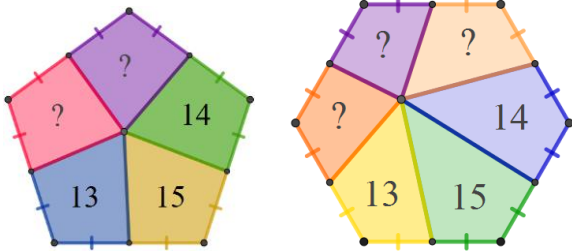
ב. כיצד להכליל את השאלה למקרה ש-P לא נמצאת בתוך המשולש, אלא נקודה כלשהי במישור?

ג. כיצד להכליל את השאלה למקרה שהמשולש ABC איננו משוכלל? במילים אחרות, אם אורכי צלעות המשולש הם a, b, c , המרחקים מ-P לצלעות המשולש הם d_a, d_b, d_c , האם ניתן לבטא את d_c באמצעות 5 המספרים האחרים שנתנו להם שמות?

2. סדרות לא קבועות של מספרים חיוביים מקיימת:

$$\begin{cases} 3a_{2n} - 5a_{2n+1} + 4a_{2n+2} = 12 \\ 4a_{2n-1} - 5a_{2n} + 3a_{2n+1} = 12 \end{cases}$$

הראו שהסדרות מחזוריות ומצאו את אורכי המחזוריים.



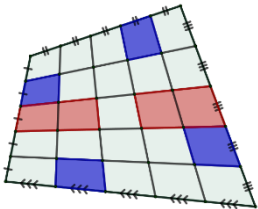
3. בציור רואים משושה ומחומש משוכללים, ואמצעי צלעותיהם. בהינתן השטחים הנתונים, האם תוכלו למצוא שטחים לא נתונים?

4. במרובע קמור ABCD, מעבירים קטעים אמצעים שמחברים אמצעים של צלעות נגדיות – יש שניים כאלה – והם נחתכים בנקודה X. הראו כי $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{DAX}$.

5. בסימונים של השאלה הקודמת, נניח גם שבמרובע ניתן לחסום מעגל שמרכזו I, שהמשכי הצלעות AB ו-CD נחתכים בנקודה Y, והמשכי הצלעות BC ו-DA נפגשים בנקודה Z. נסמן את האמצע של YZ ב-T. הראו כי T, I ו-X נמצאות על ישר אחת.

6. הראו שבכל מחומש קמור ABCDE, מתקיים

$$S_{ABCDE} < S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDE} + S_{DEA} + S_{EAB}$$



7. במרובע קמור חילקו כל צלע ל-5 חלקים שווים, והעבירו קטעים שמחברים את נקודות החלוקה המתאימות על הצלעות הנגדיות. הראו כי שטח הכולל של המשבצות האדומות שווה לשטח הכולל של המשבצות הכחולות.

8. במשולש ABC שאינו שווה שוקיים חוצי הזוויות הפנימיים הם AP_A, BP_B, CP_C , והחיצוניים הם AQ_A, BQ_B, CQ_C , כאשר P_*, Q_* נמצאות על ישרי צלעות המשולש. המרכז של המעגל החוסם הוא O, של החסום הוא I, ושל החסום מבחוץ מול הקודקוד A הוא I_a .

א. הראו כי Q_A, Q_B, Q_C נמצאות על ישר אחד שמאונך לישר OI.

ב. הראו כי Q_A, P_B, P_C נמצאות על ישר אחד שמאונך לישר OI_a .

9. בוחרים נקודה L על הצלע AB, נקודות U ו-T על הצלע BC ונקודה R על הצלע CA של המשולש ABC, כך ש-LUTRA זה מחומש קמור ושווה-צלעות (אבל לא בהכרח משוכלל). המרכז של המעגל החוסם הוא O, של החסום הוא I. הראו שאם הישרים LU, TR ו-OI נחתכים ב-3 נקודות שונות, אז הם מיצרים משולש שווה-שוקיים.

10. במשולש ABC הוכיחו כי הישר המחבר את אמצע הצלע BC ואת אמצע הגובה מ-A עובר בנקודת מפגש התיכושקפים L, ושהנקודה L היא מרכז האליפסה שחסומה במשולש ומשיקה לצלעותיו בעקבי הגבהים.

בתאבון!