אי שוויונים עם 4, 4, 1

1. א) יהי a, b ו- c מספרים חיוביים, אשר מכפלתם 1. הוכיחו כי:

$$\sqrt{1+4a(b+c)}+\sqrt{1+4b(c+a)}+\sqrt{1+4c(a+b)} \leq 3+2(a+b+c)$$

ב) יהי a, b ו- c מספרים חיוביים. הוכיחו כי:

$$\sqrt{1+4a(b+c)}+\sqrt{1+4b(c+a)}+\sqrt{1+4c(a+b)} \geq 1+\frac{8(ab+ac+bc)}{a+b+c}$$

ג) יהי a, b ו- c מספרים חיוביים עבורם $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. הוכיחו כי:

$$\sqrt{1+4a(b+c)}+\sqrt{1+4b(c+a)}+\sqrt{1+4c(a+b)}+3 \geq \frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$$

2. יהי a, b ו- c מספרים לא שליליים. הוכיחו כי:

$$a^2+b^2+c^2+\frac{6abc(a+b+c)}{ab+ac+bc} \leq \sqrt{a^4+4abc(b+c)}+\sqrt{b^4+4abc(a+c)}+\sqrt{c^4+4abc(a+b)} \leq (a+b+c)^2$$

3. יהי a, b ו- c מספרים לא שליליים אשר סכומם הוא 3. הוכיחו כי:

$$\frac{11}{3}(ab+ac+bc)-2abc \leq \sqrt{a^2b^2+4ac+4bc}+\sqrt{b^2c^2+4ab+4ac}+\sqrt{c^2a^2+4ab+4bc} \leq 6+ab+ac+bc$$

4. יהי a, b ו- c מספרים חיוביים. הוכיחו כי:

$$\sqrt{a+4b+4c}+\sqrt{b+4c+4a}+\sqrt{c+4a+4b} \geq \sqrt{25(a+b+c)+\frac{2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)^2}{a+b+c}}$$