גיאומטריה אנליטית

1. נתון משושה משוכלל ABCDEF. מצאו את המקום הגיאומטרי של נקודות עבור מכפלת המרחקים לישרים AB, CD, EF שווה למכפלת המרחקים לישרים BC, DE, FA.

2. במשולש ABC שאינו שווה שוקיים חוצי הזוויות הפנימיים הם AP_A, BP_B, CP_C, והחיצוניים הם AQ_A, BQ_B, CQ_C, כאשר P_*, Q_* נמצאות על ישרי צלעות המשולש. המרכז של המעגל החוסם הוא O, של החסום הוא I, ושל החסום מבחוץ מול הקודקוד A הוא I_a.

א. הראו כי Q_A, Q_B, Q_C נמצאות על ישר אחד שמאונך לישר OI.

ב. הראו כי Q_A, P_B, P_C נמצאות על ישר אחד שמאונך לישר OI_a.

3. בוחרים נקודה L על הצלע AB, נקודות U ו-T על הצלע BC ונקודה R על הצלע CA של המשולש ABC, כך ש-LUTRA זה מחומש קמור ושווה-צלעות (אבל לא בהכרח משוכלל). המרכז של המעגל החוסם הוא O, של החסום הוא I. הראו שאם הישרים LU, TR ו-OI נחתכים ב-3 נקודות שונות, אז הם מיצרים משולש שווה-שוקיים.

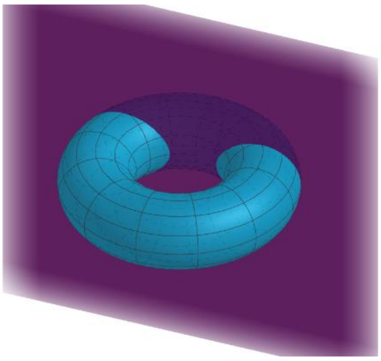
4. נתונות 4 נקודות שונות במישור: A, B, C, D. הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

א. $AB \cdot AD \cdot BD + BC \cdot BD \cdot CD + CA \cdot CD \cdot AD \geq AB \cdot BC \cdot CA$.

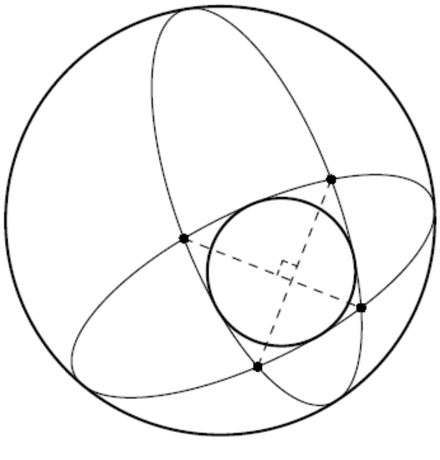
ב. $\dfrac{AD^2}{AB \cdot AC} + \dfrac{BD^2}{BA \cdot BC} + \dfrac{CD^2}{CA \cdot CB} \geq 1$.

ג. $\dfrac{AD^3}{AB \cdot AC} + \dfrac{BD^3}{BA \cdot BC} + \dfrac{CD^3}{CA \cdot CB} \geq 3 \cdot MD$,

כאשר M היא נקודת מפגש התיכונים של המשולש ABC.



5. מקום גיאומטרי של נקודות X עבורן מכפלת המרחקים מ-X לשתי נקודות הנתונות A ו-B הוא קבוע נקרא **סגלגל של קסיני**. הראו שניתן לקבל כל סגלגל של קסיני באמצעות חתך אנכי של טורוס (אבל לא כל חתך אנכי הוא קסיני).



6. נתונים שני מעגלים, מעגל קטן בתוך מעגל גדול. נתבונן בשתי אליפסות שיש לכל אחד מהן 2 נקודות השקה לכל אחד משני המעגלים (4 נקודות השקה לכל אליפסה בסה"כ).

א. הראו ששתי האליפסות דומות.

ב. הראו שבמרובע העקום שנוצר בחיתוך של שתי האליפסות, האלכסונים מאונכים.

ג. נסו לנסח ולהוכיח הכללה תלת-ממדית.

7. המרובע $A_1A_2A_3A_4$ אינו חסום במעגל. יהי O_1 מרכז המעגל החוסם של משולש $A_2A_3A_4$ ויהי R_1 הרדיוס של מעגל זה. נגדיר באופן דומה את O_2, O_3, O_4 וכן את R_2, R_3, R_4. בנוסף נתון ישר ℓ שכל הנקודות O_1, O_2, O_3, O_4 נמצאים באותי הצד שלו, ונסמן ב- d_i את המרחק מ- ℓ ל- O_i.

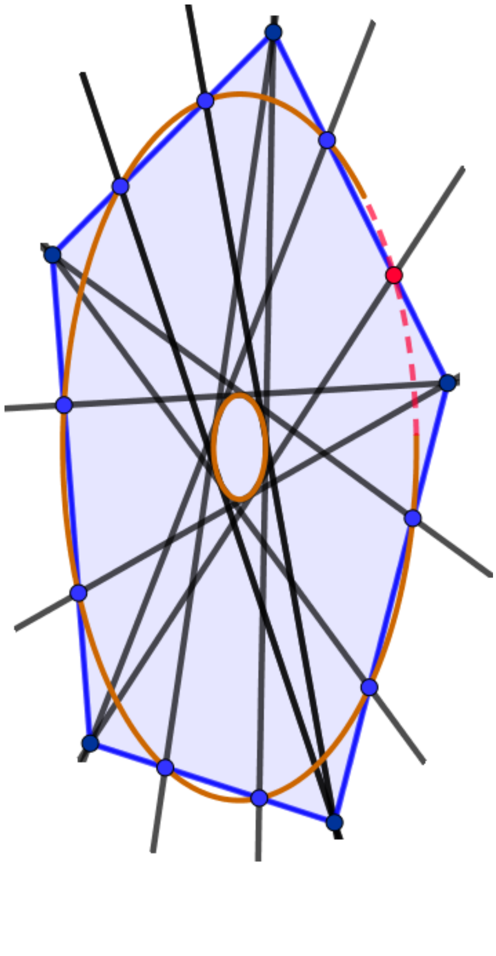
א. הוכיחו כי: $0 = \frac{1}{A_4O_4^2 - R_4^2} + \frac{1}{A_3O_3^2 - R_3^2} + \frac{1}{A_2O_2^2 - R_2^2} + \frac{1}{A_1O_1^2 - R_1^2}$.

ב. הוכיחו כי: $0 = \frac{d_4}{A_4O_4^2 - R_4^2} + \frac{d_3}{A_3O_3^2 - R_3^2} + \frac{d_2}{A_2O_2^2 - R_2^2} + \frac{d_1}{A_1O_1^2 - R_1^2}$.

ג. הכלילו את הטענה למרחב תלת-מימדי ו-5 נקודות.

8. במרחב בחרו 3 משפחות של מישורים, בכל משפחה יש N מישורים מקבילים. מסמנים N^3 נקודות שבהן נחתכים שלושות של מישורים (מישור אחד בכל משפחה). מהו המספר הקטן ביותר של מישורים שהאיחוד שלהם מכיל $N^3 - 1$ מהנקודות המסומנות (כלומר את כולן חוץ מאחת)?

9. במישור נתון מחומש קמור, ושניונית שלא מכילה אף קודקוד שלו, ולא משיקה לאף צלע ולאף אלכסון של המחומש. מכל קודקוד של המחומש מעבירים את שני המשיקים לשניונית, ומסמנים את נקודות החיתוך של שני המשיקים עם הצלע הנגדית; בצורה כזאת מסמנים 10 נקודות על צלעות המחומש. הראו שאם 9 מהנקודות המסומנות נמצאות על שניונית אחת, אז גם הנקודה המסומנת העשירית נמצא על אותה השניונית.



בתאבון!