

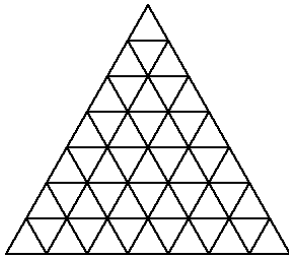
## מרדף א

1. נתון לוח  $3 \times 5775$  ועליו

- א. צריח לבן ורץ שחור  
ב. צריח לבן ופרש שחור  
מי אוכל את מי?

2. על הלוח שח אינסופי נמצא מלך לבן בלתי נראה ושני צריחים שחורים. אסור למלך לתפוס צריחים. האם הצריחים יכולים בוודאות לתת שח למלך?

3. זבוב ועכביש משחקים על קדקודי רשת  $n \times n$ . הם מתחילים בפינות נגדיות. בכל מהלך כל אחד עובר לקדקוד סמוך. האם העכביש יתפוס את הזבוב?



4. אותה שאלה ברשת משולשים.

5. במישור יש זאב ו-100 כבשים נקודתיות. בכל מהלך הזאב זז במרחק 1 לכל היותר, ואחר כך אחת הכבשים זזה במרחק 1 לכל היותר. האם הזאב יוכל לתפוס איזושהי כבשה?

6. א. בלוח משבצות נמצאים 3 זאבים ו-3 כבשים. בכל מהלך זאב אחד הולך למשבצת סמוכה לפי צלע, וכבשה אחת הולכת שמאלה או ימינה. האם תמיד אפשר לתפוס כבשה אחת לפחות?

ב. אותה שאלה עבור 2 כבשים ו-100 זאבים.

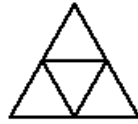
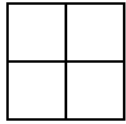
7. על לוח משבצות  $n \times n$  נמצאים זבוב ושני עכבישים. בכל מהלך זבוב עובר למשבצת חדשה שיש לה קודקוד משותף עם המשבצת הקודמת (יכול גם להישאר במקום). לאחר מכן כל אחד משני העכבישים עובר למשבצת חדשה סמוכה שיש לה צלע משותפת עם המשבצת הקודמת (יכול גם להישאר במקום). אם עכביש וזבוב מגיעים ברגע מסוים לאותה משבצת, העכבישים מנצחים (אפילו אם העכביש הגיע לאותה המשבצת קודם, לא כמו בשח). האם לעכבישים יש אסטרטגיה מנצחת?

8. זאב נמצא במרכז ריבוע, ובכל פינה נמצא כלב. מטרת הכלבים היא שהזאב יישאר בתוך הריבוע, והזאב רוצה להימלט. הכלבים יכולים לנוע על ההיקף בלבד.

א. שני כלבים יותר חזקים מהזאב, אבל הזאב חזק מכלב אחד. הכלבים מהירים פי 1.5 מהזאב. מי מנצח?

ב. הכלבים שמנו קצת מהסעיף הקודם. כעת אפילו כלב אחד יכול לנצח זאב, אבל הכלבים זריזים מהזאב רק פי 1.4. מי מנצח?

9. אותו הסיפור, אבל הזאב זריז מהכלבים, ויש 100 כלבים, במצב התחלתי שהכלבים בוחרים. האם הזאב יצליח להימלט?

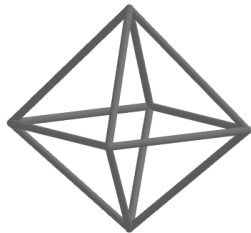


10. לכל אחת מהרשתות בציורים: בפינה אחת נמצא קוף, ובפינה אחרת נמצאים שני שומרים. הקוף מהיר פי 3 מהשומרים. האם יוכלו לתפוס אותו?

11. שאלה דומה על מקצועות של ארבעון משוכלל, אבל הקוף מהיר פי 2 מהשומרים. ומה לגבי ארבעון לא משוכלל?

12. כעת בארבעון משוכלל, נמצא עכבר שרץ על המקצועות, אשר מהיר פי 2.01 מכל אחד משני החורפנים המעופפים שנמצאים בחדר. האם הוא יוכל לשרוד?

13. א. זבוב ועכבישים זוחלים על המקצועות של קובייה תלת ממדית במהירויות שוות. כמה עכבישים צריך בשביל שבכל מצב הם יוכלו לתפוס את הזבוב?  
 ב. ומה אם הם זוחלים על המקצועות החד-ממדיים של קובייה  $n$ -מימדית?



14. זאב צד ארנב בתחנת הלל, שמורכבת מ-12 מסדרונות שיוצרים תמניון משוכלל. הזאב יכול לראות את הארנב רק אם הם נמצאים באותו המסדרון. הזאב מהיר יותר מהארנב פי 2.5. האם לזאב יש אסטרטגיה המאפשרת לצוד את הארנב?

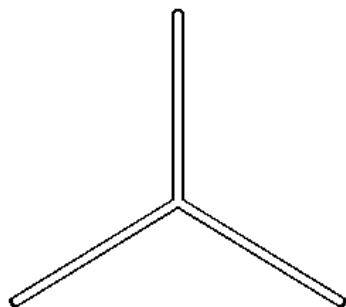
15. במרכז הריבוע נמצא שוטר, באחד מקודקודיו – פושע. השוטר יכול לרוץ לאורך הריבוע, והפושע – רק על צלעותיו. השוטר מסוגל לירות לאורך צלע של ריבוע, לכן אם ברגע מסוים השוטר והפושע יהיו על צלע אחת, השוטר יצליח לתפוס אותו. עבור איזה יחס מירבי בין המהירויות שלהם ינצח השוטר?

16. פושע ושני שוטרים בעלי אותה מהירות רצים על מקצועות של קובייה  $N$ -ממדית. הקובייה שקופה והשוטרים רואים את הפושע בכל רגע נתון. לשוטרים יש אקדחי לייזר, והם מסוגלים לירות בפוּשע לאורך מקצוע. האם לכל מצב התחלתי השוטרים יכולים להרוג את הפושע

א. עבור  $N = 3$  ?

ב. עבור  $N = 4$  ?

ג. עבור  $N$  כללי ?



בתיאבון!

17. פושע ושוטר נמצאים בשלושה פרוזדורים באורך  $l$  כל אחד, שמתחברים בקצה המשותף של כל הפרוזדורים (כמו בציור). השוטר מסוגל לרוץ פי 2 יותר מהפושע. על מנת לראות את הפושע, השוטר צריך להימצא איתו באותו הפרוזדור ובמרחק  $r$  ממנו או פחות. הוכיחו, שהשוטר יוכל לתפוס את הפושע אם א.  $r > l/5$ , ב.  $r > l/7$ .

## מרדף ב'

0. במרכז הריבוע יש חורפן ובפינה עכבר. לחורפן מותר לטייל בכל שטח הריבוע, ולעכבר – רק על היקף. איזה יחס מהירויות ישביע את החורפן?

1. חורפן נמצא במרכז מגרש שצורתו מצולע משוכלל המוגבל על ידי גדר. הוא יכול לצאת מהמגרש רק דרך אחת הפינות. בפינת המגרש נמצא כלב שמירה שיכול לנוע לאורך הגדר. מטרת החורפן היא לצאת מהמגרש; מטרת הכלב היא למנוע זאת. עבור איזה יחס מהירויות יוכל החורפן לברוח, כאשר:

א. המגרש הוא משולש שווה-צלעות?

ב. המגרש הוא ריבוע?

2. כעת החורפן במרכז מעגל, וכלב השמירה על המעגל. לחורפן מותר לטייל בכל המישור, ולכלב – רק על היקף המעגל. האם החורפן יוכל לברוח מהעיגול כאשר

$$\text{א. } \frac{v_{\text{dog}}}{v_{\text{mink}}} = 4 \quad ? \quad \text{ב. } \frac{v_{\text{dog}}}{v_{\text{mink}}} = 4.5 \quad ?$$

3. שאלה דומה עבור ריבוע: בהתחלה החורפן במרכז הריבוע, והכלב בפינה. לחורפן מותר לטייל בכל המישור, ולכלב – רק על היקף הריבוע. האם החורפן יוכל לברוח כאשר

$$\text{א. } \frac{v_{\text{dog}}}{v_{\text{mink}}} = 4 \quad ? \quad \text{ב. } \frac{v_{\text{dog}}}{v_{\text{mink}}} = 5 \quad ?$$

4. שאלה דומה עבור משולש שווה צלעות: בהתחלה החורפן במרכז המשולש, והכלב בפינה. האם החורפן יוכל להימלט כאשר

$$\text{א. } \frac{v_{\text{dog}}}{v_{\text{mink}}} = 7 \quad ? \quad \text{ב. } \frac{v_{\text{dog}}}{v_{\text{mink}}} = 7.3 \quad ?$$

5. העכבר ג'רי, החתול טום והכלב ספייק משתתפים במשחק מרדף. המרדף מתבצע במישור, כאשר כל חיה היא מעגל ברדיוס 5 ס"מ (ואסור למעגלים להיחתך). בהתחלה המרחק בין טום לג'רי הוא 200 מטר, וספייק נמצא בדיוק באמצע. מטרתו של טום היא לאכול את ג'רי בלי שספייק יאכל אותו (האכילה מתבצעת ברגע שהם נוגעים זה בזה). המהירויות של ספייק ושל ג'רי הן 1 מטר לשנייה. עבור אילו מהירויות של טום הוא יוכל להשיג את מטרתו?

6. במישור נמצאים שני מטמונים במרחק מטר זה מזה, וביניהם עומד שומר. במרחק קילומטר מהשומר עומד פורץ, המהיר פי  $\lambda$  מהשומר. עבור אילו ערכי  $\lambda$  הפורץ יצליח להגיע לאחד המטמונים לפני שהשומר תופס אותו?

7. נתון ארבעון (לאו דווקא משוכלל) בחלל אינסופי תלת-מימדי. בקדקודיו מרחפים ארבעה חורפנים מעופפים, ובפנים הארבעון (לא על פאה) מרחף יונק דבש. מהירויות כל היצורים זהות. האם החורפנים יצליחו לתפוס את הציפור בזמן סופי?

**\*8.** בעיית הנהג הרוצח הדיסקרטי: שניים משחקים בתורות על לוח משבצות אינסופי. בכל מהלך של הולך הרגל הוא הולך למשבצת סמוכה לפי צלע. בכל מהלך של המכוננית, הנהג בוחר האם להמשיך באותו הכיוון כמו במהלך הקודם, או לפנות ימינה, והמכוננית נעה שתי משבצות בכיוון שנבחר (בתור הראשון ניתן לבחור כל כיוון שמקביל לצלעות המשבצות). המכוננית מנצחת אם היא נמצאת במשבצת של הולך הרגל, או במשבצת סמוכה לפי קדקוד. מי מנצח?

**\*9.** על קטע  $[0,1]$  נמצאת נסיכה ומפלצת. הנסיכה מסוגלת לרוץ בכל מהירות סופית. המפלצת רצה במהירות 1 לכל היותר. ברגע שהנסיכה נמצאת באותה נקודה עם המפלצת, היא נאכלת מיד. מטרת הנסיכה היא להגדיל את תוחלת החיים שלה, ומטרת המפלצת היא להקטין את תוחלת החיים שלה. כל אחד מהשחקנים בוחר את נקודת ההתחלה שלו, וכולם יודעים את חוקי המשחק, ולא רואים זה את זה. מהן האסטרטגיות האופטימאלית לשני השחקנים?

**10.** באוויר מרחף בייגלה, ועליו נמצאים שני עכבישים וזבוב. הזבוב שמן ולא נקודתי. לכולם מהירויות שוות. האם העכבישים יצליחו לתפוס את הזבוב?

**11.** נתון לוח משבצות  $n \times n$ . החתול בארס מתיישב על אחת ממשבצות הלוח לפי בחירתו. לאחר מכן  $d$  דרורים נוחתים על משבצות הלוח לפי בחירתם (מספר דרורים יכולים להימצא באותה המשבצת). בארס והדרורים משחקים בתורות; בכל מהלך של בארס, הוא עובר ממשבצת שבה הוא נמצא למשבצת סמוכה לפי צלע או לפי קודקוד (כמו מלך בשחמט). בכל מהלך של הדרורים, אחד מהדרורים מתעופף מהמשבצת שבה הוא נמצא למשבצת כלשהי לפי בחירתו. המטרה של בארס היא להגיע למשבצת שנמצא בה דרור. האם בארס יצליח להשיג את מטרתו

א. כאשר  $d = \left\lfloor \frac{3 \cdot n^2}{25} \right\rfloor$ , לכל  $n$  גדול מספיק?

ב. כאשר  $d = \left\lfloor \frac{3 \cdot n^2}{19} \right\rfloor$ , לכל  $n$  גדול מספיק?

ג. כאשר  $d = \left\lfloor \frac{3 \cdot n^2}{14} \right\rfloor$ , לכל  $n$  גדול מספיק?

**12\*.** משחק<sup>1</sup> מתבצע על מלבן שהצלעות הארוכות שלו מכוונות ממזרח למערב והן באורך 100 ק"מ והצלעות הקצרות באורך 1 ק"מ (כדה"א שטוח). הצד הדרומי של המלבן הוא כביש; על הכביש ניתן לרוץ במהירות של 10 קמ"ש; יתר המלבן הוא שטח שבו אפשר להתקדם רק במהירות 2 קמ"ש. בפניה הצפון-מזרחית נמצאים פושעים (נקודתיים), ובפניה הדרום מזרחית (כלומר על הכביש) נמצא שוטר עם אקדח, שבאמצעותו הוא יכול לחסל פושע הנמצא במרחק  $R$ . כולם רואים את כולם ויודעים את כל כללי המשחק. מטרת הפושעים היא שלפחות אחד מהם יגיע ללא פגע לצד המערבי של המלבן.

א. נניח שיש פושע אחד,  $R = 50$  מטרים. האם השוטר יוכל לחסל אותו?

ב. נניח שיש שני פושעים,  $R = 400$  מטרים. האם השוטר יוכל לחסל את שניהם?

ג. נניח שיש שני פושעים,  $R = 100$  מטרים. האם השוטר יוכל לחסל את שניהם?

**13.** ציידת וארנבת בלתי-נראית משחקות משחק במישור האוקלידי. נקודת ההתחלה של הארנבת  $A_0$  ונקודת ההתחלה של הציידת,  $B_0$  זהות. לאחר  $n-1$  סיבובים של המשחק הארנבת נמצאת בנקודה  $A_{n-1}$  והציידת נמצאת בנקודה  $B_{n-1}$ . בסיבוב ה- $n$  של המשחק שלושה דברים מתרחשים בסדר הבא:

(i) הארנבת מקפצת באופן נסתר לנקודה  $A_n$  עבורה המרחק בין  $A_{n-1}$  ו- $A_n$  הוא בדיוק 1.

(ii) מכשיר מעקב מציג לציידת נקודה  $P_n$ . מכשיר המעקב מבטיח לציידת רק שהמרחק בין  $P_n$  ל- $A_n$  הוא לכל היותר 1.

(iii) הציידת הולכת באופן גלוי לנקודה  $B_n$  עבורה המרחק בין  $B_{n-1}$  ל- $B_n$  הוא בדיוק 1. האם הציידת תמיד יכולה, לא משנה איך הארנבת מקפצת, ולא משנה אילו נקודות מוצגות על ידי מכשיר המעקב,  $10^9$  סיבובים היא תוכל להבטיח שהמרחק בינה ובין הארנבת הוא לכל היותר 100?

**בתיאבון!**

<sup>1</sup> השאלה נכתבה בהשראת [שיר רוסי עממי מפורסם](#):

*По тундре, Вдоль железной дороги, Где мчится поезд Воркута-Ленинград,  
Мы бежали с тобою От проклятой погоны, Чтобы нас не настигнул Пистолета разряд!*

## תורת המרדף

**בעיית אפולוניוס.** חורפן נקודתי רעב רודף אחרי עכבר נקודתי שרוצה לחיות. מהירות החורפן גדולה ממהירות העכבר. תוך כמה זמן יתפוס החורפן את העכבר?

א. עכבר עיוור שרץ בקו ישר.

ב. עכבר רואה.

ג. קבוצת מוות.

ד. קבוצת חיים.

ה. עכבר ערמומי.

בעיית הנהג הרוצה:

א. רציף: במישור נמצאים הולך רגל ומכונית, אבל המכונית לא יכולה לפנות מהר.

ב. דיסקרטי: לוח משבצות אינסופי. משחקים בתורות. הולך הרגל הולך בכל מהלך שלו למשבצת סמוכה לפי צלע. המכונית עושה בכל מהלך שני מהלכים כאלה שהם באותו כיוון, שהוא זהה לכיוון של המהלך הקודם או ימינה ממנו. המכונית מנצחת אם היא נמצאת במשבצת של הולך הרגל, או במשבצת סמוכה לפי קדקוד.

מטיילים שהלכו לאיבוד וצוות חיפוש.

הנוצרי והאריה.

חורפן במרכז הריבוע ועכבר בפינה. עבור איזה יחס מהירויות מנצח החורפן?