

מספרים לי

שחסר לכם מספרים

בתרגיל זה כל הלוטרות יודעות הכל

1. מספר טבעי n נקרא מגניב אם אפשר למצוא מספרים טבעיים a_i כך ש:

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$
$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k}$$

איילה כבר בדקה שכל המספרים בין 33 ל-73 הינם מגניבים, הוכיחו שכל המספרים החל מ-33 מגניבים.

2. ברוז סימן קטע באורך $1/n$ על הישר הממשי. הוכיחו שכמות השברים עם מכנה קטן או שווה ל- n בקטע לא עולה על $\frac{n+1}{2}$.

3. גמל מחפש מספרים טבעיים n עבורם ל- $n^2 + 1$ יש מחלק ראשוני גדול מ- $\sqrt{2n} + 2n$. הראו שגמל ימצא אינסוף מספרים.

4. דורבן חישב את הסדרה הבאה:

$$a_0 = 2$$

$$a_{k+1} = 2a_k^2 - 1$$

וגילה שהראשוני האהוב עליו, p , מחלק את a_n . הראו ש- $2^{n+3} | p^2 - 1$.

5. היפו אוהב מספרים טבעיים שהם סכום ריבועים **שונים**, הוכיחו שהיפו אוהב את כל המספרים הטבעיים חוץ מכמות סופית.

6. וומבט בחר ראשוני p , וחיפש קבוצות מספרים טבעיים עם התכונות הבאות:

(1) קבוצת הראשוניים שמחלקים מספר מהקבוצה היא מגודל $p - 1$.

(2) לכל בחירה של תת-קבוצה לא ריקה של הקבוצה של וומבט, המכפלה אינה חזקת p מושלמת.

כמה איברים וומבט יצליח להכניס לקבוצה?

7. זברה ראתה שלושה מספרים a, b, c כך ש:

$$(ab + 1)(bc + 1)(ca + 1)$$

ריבוע מושלם, וישר אמרה ש- $ab + 1, bc + 1, ca + 1$ גם ריבועים. הוכיחו לעצמכם שזברה צודקת.