

טבלאות

1. 17 תלמידים השתתפו בתחרות מתמטית בה היו 9 שאלות. כל שאלה נפתרה על ידי 11 תלמידים בדיוק. הוכיחו שקיים זוג תלמידים, כך שכל שאלה נפתרה על ידי לפחות אחד מהם.

2. במועדון שחמט, n שחקנים נאספו לטורניר, בו בסך הכל שוחקו $3n$ משחקים, וכל שני שחקנים שיחקו לכל היותר פעם אחת ביניהם. בנוסף, ידוע שלכל שני שחקנים A, B , קיים לכל היותר שחקן אחד נוסף C ששיחק עם שניהם. הוכיחו כי $n > 30$.

3. שמונה זמרים הופיעו במופע שירה שבו m שירים בוצעו. כל שיר בוצע על ידי 4 זמרים, ובנוסף כל זוג של זמרים הופיעו ביחד באותה כמות של שירים. מצאו את ה- m המינימלי עבורו זה אפשרי.

4. בתחרות יש a מתחרים ו- b שופטים, כאשר b אי זוגי. כל שופט מדרג כל מתחרה כ- "עובר" או "נכשל". נתון שכל זוג שופטים הסכימו על לכל היותר k מתחרים. הוכיחו כי

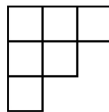
$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

5. קבוצת אנשים נקראת **טובה** אם לכל אחד בה יש מספר זוגי (כולל אפס) של חברים בה (חברות היא הדדית). הוכיחו שניתן לפצל כל קבוצה של אנשים לשני חלקים (אולי ריקים), כך שכל חלק מהווה קבוצה טובה.

6. בארון ספרים יש לפחות ספר אחד בכל מדף. נזק בא וסידר מחדש את הספרים בארון. האם יתכן שכל ספר נמצא במדף עם פחות ספרים מהמדף שהוא נמצא בו לפני כן?

7. מרדכי וצבי משחקים במשחק הבא. בתחילת המשחק יש לוח משבצות $m \times n$, כולו לבן, כאשר $n \leq 9$. בשלב הראשון מרדכי משלם לצבי סכום של s שקלים, וצבי חייב לצבוע בדיוק s משבצות בכחול (צבי יכול לבחור בעצמו איזה משבצות הוא צובע). אחרי שצבי מסיים את עבודת הצביעה, מרדכי יכול להחליף את סדר השורות של הטבלה וגם את סדר העמודות של הטבלה, לפי בחירתו. המטרה של מרדכי היא שבסופו של דבר בפינה הימנית העליונה תהיינה 6 משבצות בצבע כחול: המשבצת הפינתית, שתי המשבצות הסמוכות לה, ו-3 המשבצות הסמוכות לשתי המשבצות הללו (כמו בציור).

כמה מרדכי יצטרך לשלם לצבי, בהנחה ששניהם אינם ילדים מפגרים?



8. כל מספר שלם נצבע באחד מארבע צבעים. בהינתן שלמים אי-זוגיים x, y כך ש $|x| \neq |y|$, הראו שקיימים שני מספרים שלמים באותו הצבע שהפרשים שווה לאחד מ-

$$x, y, x + y, x - y.$$

9. בתחרות מתמטית השתתפו 21 בנים ו-21 בנות. כל מתחרה פתרה/לכל היותר 6 שאלות. לכל זוג של בת ובן, הייתה שאלה שנפתרה על ידי שניהם. הוכיחו שהייתה שאלה שנפתרה על ידי לפחות 3 בנות ולפחות 3 בנים.

10. ברצונך לחתוך עוגה למסיבה, אך לא ידוע לך אם יבואו m אורחים או k אורחים. לכמה חלקים צריך לחתוך את העוגה (במינימום) כך שבשני המקרים יהיה אפשר לחלק את העוגה שווה בשווה בין המשתתפים?

בתיאבון!