

תיכושקף

תיכושקף הוא השיקוף של התיכון במשולש סביב חוצה הזווית ממנה יוצא התיכון. שלושת התיכושקפים נפגשים בנקודה אחת שנקראת נקודת למואן (בדרך כלל מסומנת ב-L).

1. נתון מעגל Ω ונתונה נקודה A מחוצה לו. המשיקים מ- A ל- Ω משיקים ב- B, C . אמצע BC יסומן M . המיתר XY במעגל Ω עובר דרך M . הוכיחו כי $\angle BAX = \angle CAY$.

2. יהי ABC משולש ותהי L מפגש התיכושקפים בו. מעבירים דרך L שלושה ישרים המקבילים לצלעות המשולש, וחותכים את הצלעות ב-6 נקודות. הוכיחו ש-6 הנקודות הללו נמצאות על מעגל אחד.

3. כמו השאלה הקודמת, רק שהישרים אנטי-מקבילים לצלעות, ולוקחים את נקודות החיתוך עם הצלעות שאינן מתאימות (אנטי-מקבילות) לישרים המתאימים.

4. במשולש ABC חוצה הזווית $\angle A$ חותך את הצלע BC ואת המעגל החוסם של המשולש בנקודות D ו- E בהתאמה. הנקודה F על המעגל החוסם מקיימת שהזווית $\angle DFE$ ישרה. הראו כי AF הוא תיכושקף במשולש.

5. נתונים שני מעגלים ω_1 ו- ω_2 הנחתכים בנקודות A ו- B . העבירו משיק משותף CD לשני המעגלים (כאשר C ו- D נקודות ההשקה לשני המעגלים בהתאמה, B יותר קרובה ל- CD מאשר A). העבירו ישר דרך A החותך שנית את ω_1 ו- ω_2 בנקודות K ו- L בהתאמה. הישרים KC ו- LD נחתכים בנקודה P . הוכח כי BP תיכושקף במשולש AKL .

6. במשולש ABC הגבהים AD, BE, CF נפגשים בנקודה H . האנכים מ- H ל- DE, DF חותכים את AB, AC בנקודות U, V בהתאמה. הראו כי האנך מ- A ל- EF חוצה את הקטע UV .

7. במשולש ABC החיתוך של התיכושקף מ- A עם הצלע BC יסומן D . עקב האנך מ- C ל- AD יקרא E . המעגל העובר דרך B, D, E פוגש שנית את המעגל החוסם של ABC בנקודה F . נסמן ב- M את אמצע הצלע BC . הראו כי הזווית $\angle MFB$ היא ישרה.

8. הוכיחו שבהינתן משולש, נקודת למואן בו נמצאת על הקטע שמחבר אמצע של גובה בו עם אמצע הצלע אליה הוא מאונך.

9. במשולש חד זוויות שאינן שווה שוקיים ABC הגבהים BE ו- CF נחתכים בנקודה H . תיכוני המשולש BCH נחתכים ב- M . הישר AM חוצה את הקטע EF . חשב את גודל הזווית $\angle A$.

10. נתון משולש ABC ומעגל Γ העובר דרך B ו- C וחותר את הצלעות AB ו- AC בנקודות E ו- D בהתאמה. יהיו ω_1 ו- ω_2 המעגל שמשיק לצלע AC ועובר דרך B ו- D , והמעגל שמשיק לצלע AB ועובר דרך C ו- E , בהתאמה. הישר DE חותר את ω_1 ו- ω_2 בנקודות X ו- Y בהתאמה. המשיק ל- Γ בנקודה B פוגש שנית את ω_1 ב- P , והמשיק ל- Γ בנקודה C פוגש שנית את ω_2 ב- Q . אמצע הקטע XY יסומן M , ונקודת חיתוך הישרים PQ ו- DE תסומן N . הוכיחו כי חוצה הזווית $\angle BAC$ חוצה גם את הזווית $\angle MAN$.

11. במשולש ABC נקודת למואן היא L . המעגלים ABL, ACL, BCL חותכים את הצלעות ב-6 נקודות חדשות. הוכיחו כי 6 הנקודות הללו נמצאות על מעגל אחד. הראו כי L היא הנקודה היחידה (שאינה על המעגל החוסם) שמקיימת תכונה זו.

12. נתון משולש ABC שחוסם במעגל Ω . הגובה מ- A חותר את Ω בנקודה D , והגבהים מ- B ו- C פוגשים את הצלעות שמולם בנקודות E ו- F . הישרים DE ו- DF פוגשים שנית את Ω בנקודות Q ו- P בהתאמה. הוכיחו שהישרים BQ ו- CP נפגשים על אמצע הקטע EF .

13. נתון משולש ABC החוסם במעגל Ω . הנקודה הנגדית ל- A ב- Ω תסומן A' . התיכון מ- A חותר את הישרים $A'B, A'C$ בנקודות U, V בהתאמה. האנך ב- U ל- $A'U$ יסומן l_1 , והאנך ב- V ל- $A'V$ יסומן l_2 . הוכיחו שהמעגל החוסם של המשולש שנוצר על ידי הישרים BC, l_1, l_2 משיק למעגל Ω .