

## שאלות סשה – קבוצת ירדן

1. בגן ילדים יש 7 ילדים. בכל ארוחת בוקר הם יושבים מסביב לשולחן עגול במקומות קבועים. כל ילד הוא טוב או רע. ילד טוב תמיד אומר את האמת, ילד רע תמיד משקר. אם לילד טוב אומרים שהוא ילד רע אז הוא נעלב ונהיה לקראת הערב ילד רע. אם לילד רע אומרים שהוא ילד רע, אז הוא מתבייש בעצמו ולקראת הערב נהיה ילד טוב. בארוחת הבוקר של יום ראשון כל ילד הביע דעה על הילד שמשמאלו. בארוחת הבוקר של יום שני כל ילד הביע דעה על הילד שיושב שני מקומות משמאלו. בארוחת הבוקר של יום שלישי כל אחד הביע דעה על הילד שיושב 3 מקומות משמאלו, וכך הלאה (וביום שישי כל אחד הביע דעה על הילד שמימינו). הוכיחו שלאחר שבוע המצב חזר לקדמותו.

2. מטילים קובייה הוגנת בין שני מישורים, שמשופעים ב- $45^\circ$  בכיוונים שונים. לאחר הזריקה הקובייה נופלת כך ששתי פאות שלה פונות כלפי מעלה. תוצאת הזריקה היא סכום המספרים (הממשיים) הכתובים על פאות אלו. האם ניתן לבחור את המספרים הכתובים על הפאות, כך שהתוצאה תמיד תהיה 1, 2, 3, 4, 5 או 6, והסיכוי לקבל כל אחת מהאפשרויות האלו יהיה שווה?

3. מרדכי והמן משחקים משחק על רשת משולשית. מרדכי צובע בכל תור צלע של משבצת משולשית בכתום, והמן צובע בכל תור צלע של משבצת משולשית בכחול. מרדכי מתחיל.

א. נניח שהמטרה של מרדכי היא שיווצר במהלך המשחק משולש שווה צלעות שכל הצלעות שלו צבועות באותו הצבע, ואורך הצלע שלו גדולה מאורך הצלע של המשבצות. האם יוכל מרדכי להשיג את מטרתו?  
ב. נניח שהמטרה של מרדכי היא שבאחת המשבצות כל הצלעות יהיו באותו צבע. האם הוא יוכל להשיג מטרה זו? אם כן, כמה מהלכים ידרשו לשם כך במקרה הגרוע ביותר?

4. במחסן נמצאות משקולות שעליהן רשומים המשקלים שלהן: 1 ג', 2 ג', ..., 3 ג'. קיימת משקולת פגומה, והמשקל האמיתי של המשקולת הזאת קטן ממה שרשום עליה, אבל על כל המשקולות האחרות המשקל שרשום הוא נכון. כמה שקילות על מאזני כף נחוצות, על מנת שנוכל לאתר בוודאות את המשקולת הפגומה?

5. סבתא אפתה עוגה בצורה של מלבן מישורי. לסבתא יש סכין ארוכה שמאפשרת לחלק את העוגה לאורך קו שמחבר שתי נקודות נתונות (למשל, כבר בהתחלה ניתן לחתוך את העוגה לאורך אלכסון). מותר גם להזיז חלקים של העוגה ולהצמיד אותם בצורה אחרת.

א. סבתא רוצה לחלק את העוגה ל-3 מנות שוות שטח עבור שלושת הנכדים שלה. מהי כמות החיתוכים המינימאלית שהיא צריכה לבצע?

ב. הוכיחו שסבתא יכולה לחלק את העוגה ל- $n$  מנות שוות שטח, כאשר  $n$  זו כמות הילדים בגן (מספר טבעי כלשהו).

6. שלושה קיפודים נמצאים בקודקודים של משולש משוכלל שאורך הצלע שלו 100 מטרים. ברגע מסוים כל קיפוד הולך בקו ישר: הקיפוד הראשון הולך מטר, השני שני מטרים, והשלישי 3 מטרים.

א. האם יתכן שבסוף הקיפודים נמצאים בקודקודים של משולש משוכלל?

ב. האם יתכן שבסוף הקיפודים נמצאים בקודקודים של משולש משוכלל באותו גודל כמו המשולש המקורי?

ג. שאלה דומה עבור ריבוע: האם יתכן שארבעה קיפודים התחילו בקודקודים של ריבוע עם אורך צלע 100 מטר, עברו מרחקים 1, 2, 3 ו-4 מטרים (לאו דווקא בסדר זה), וסיימו את תנועתם בקודקודים של ריבוע?

7. בכל משבצת של לוח משבצות ריבועי כתוב 0 או 1. מותר לשנות את הערכים שכתובים באלכסון הראשי. הוכיחו שאפשר להגיע למצב, בו כל השורות שונות זו מזו וכל העמודות שונות זו מזו.

8. מצאו את כל הפולינומים  $P$  המקיימים  $P(P(x)) + x = P(P(x) + x)$ .

9. נתונים 100 מחומשים קמורים. חיתוך של כל שני מחומשים הוא מצולע עם  $k$  צלעות. מצאו את כל הערכים האפשריים של  $k$ .

10. במישור סומנו  $N$  נקודות שלא כולן על ישר אחד. משולש נקרא חשוב אם כל קודקודיו הן נקודות מסומנות. האם יתכן שמרכז המעגל החוסם של כל משולש חשוב הוא נקודה מסומנת?

בתאבון!