תרגיל מספרים

1. יהי p ראשוני אי-זוגי, ונתונה הקבוצה $1,2,3,...,\left\lceil \sqrt{p} \right\rceil$. הוכיחו כי בקבוצה קיים איבר שהוא אינו שארית ריבועית מודולו p (כלומר קיים מספר x בקבוצה, כך שלא קיים a שמקיים $a^2 = x$ מודולו p).

2. נתונה סדרה a_n עולה אין-סופית של מספרים שלמים חיוביים, כך שלכל מספר בסדרה יש לכל היותר 5782 מחלקים ראשוניים (כולל כפילויות). הראו כי קיימת ל-a_n תת סדרה b_n אשר מקיימת כי לכל i, j המחלק המשותף הגדול ביותר של b_i ו-b_j קבוע.

3. פשטו את הביטוי $\sum\limits_{d \mid 10!} \frac{1}{d + \sqrt{10!}}$.

4. נתבונן בכל המספרים החמש-ספרתיים, אשר הספרות שלהם מהוות תמורה של 1,2,3,4,5. הוכיחו כי ניתן לחלק אותם לשתי מחלקות, כך שסכום ריבועי המספרים בכל מחלקה יהיה זהה.

5. נתונים 2017 מספרים ראשוניים $p_1, p_2, ..., p_{2017}$. הראו כי $\prod\limits_{i<j}\left(p_i^{p_j} - p_j^{p_i} \right)$ מתחלק ב-5777.

6. על הלוח כתובים כל המספרים השלמים מ-1 עד 100, כולל. בכל תור, בוחרים שני מספרים a,b שכתובים על הלוח, מוחקים אותם וכותבים במקומם את $a^6 + b^6 + 2$. האם יתכן שהמספר שיישאר בסוף יהיה ריבוע?

7. קבוצת שלמים חיוביים נקראת **ריחנית** אם היא בעלת שני איברים לפחות, ולכל איבר יש מחלק ראשוני משותף עם לפחות אחד האיברים האחרים. יהא $P(n) = n^2 + n + 1$. מהו הערך המינימלי האפשרי של השלם החיובי b עבורו קיים שלם אי-שלילי a כך שהקבוצה $\{P(a+1), P(a+2), ..., P(a+b)\}$ היא ריחנית?

8. הראו כי לכל מספר שלם N קיים מספר בעל N ספרות לכל היותר אשר מתחלק בכל הראשוניים שקטנים מ-N, וברישום העשרוני שלו לא מופיעות הספרות 4 או 5 בכלל.

9. לאילו מספרים שלמים קיימת כפולה אשר ברישום העשרוני שלה לא מופיעה בכלל הספרה אפס?

10. מצאו את כל הרביעיות (a,b,c,n) של שלמים חיוביים עבורן מתקיים $a^{d(a)} + b^{d(b)} + c^{d(c)} + 1 = 10^n$, באשר $d(k)$ הוא כמות המחלקים החיוביים של k.

בתאבון!