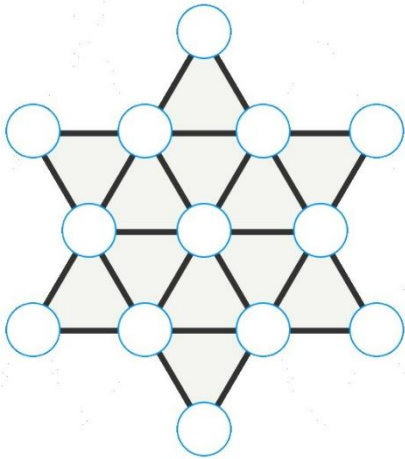


תחרות קבוצתית



1. בציור מופיע מגן דוד בעל 13 קודקודים. יגאל צריך לכתוב בכל אחד מהקודקודים מספר שלם חיובי, כך שכל 13 המספרים יהיו שונים. בנוסף, שלושת המספרים בקודקודים של כל משולש קטן בציור (יש 12 משולשים כאלה) צריכים להוות סדרה חשבונית. מצאו את הסכום המינימלי האפשרי של כל 13 המספרים.

2. בשורה יש n כיסאות במרחקים שווים, ממוספרים מ-1 עד n לפי הסדר. על כל כיסא מונח פתק בו רשום מספרו של כיסא אחר, כך שכל

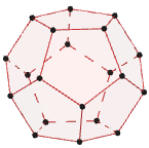
מספר מופיע על פתק אחד בדיוק. בהתחלה על כל כיסא יושב ילד. בכל פעם שמצלצלים בפעמון, כל ילד קורא את הפתק שמונח על כיסאו ועובר לשבת על הכיסא שמספרו רשום על הפתק (מבלי להזיז את הפתק). ידוע שלאחר k צלצולי פעמון, כל ילד נמצא במרחק זהה מהכיסא ההתחלתי שלו, והמרחק אינו 0 (כלומר אף ילד לא יושב על הכיסא ההתחלתי שלו). עבור אילו ערכי n, k זה יתכן?

3. יש 5 נקודות שונות במישור A, B, C, D, E כך ש- BCD, ABD, ADE שווי צלעות. הוכיחו כי לכל שלוש נקודות במישור F, H, G מתקיים:

$$AF + FE + BG + GC + FH + HD + HG \geq 2AC$$

4. הראו כי $\lceil a \rceil + \lceil b \rceil + \lceil c \rceil + 3\lfloor a+b+c \rfloor \geq 2(\lfloor a+b \rfloor + \lfloor a+c \rfloor + \lfloor b+c \rfloor)$ לכל $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5. בכל קודקוד של תריסרון משוכלל נמצאת נורה. כל נורה יכולה להיות דלוקה או כבויה. נורות נחשבות שכנות אם קודקודיהן מחוברים ע"י מקצוע. ברגע אגדי מסוים באופן קסום מדליקים כל נורה שמספר אי-זוגי של שכנותיה היו דלוקות, ומכבים כל נורה שמספר זוגי של שכנותיה היו דלוקות. עבור כמה מהמצבים ההתחלתיים מצב הנורות לא ישתנה כלל ברגע האגדי?



6. מצאו את הערך המינימלי של $\frac{|x| + |x+3y| + |y+4z| + 3|z|}{|x+y+z|}$ עבור $x, y, z \in \mathbb{R}$ כך

$$x + y + z \neq 0$$

7. ABCDE מחומש משוכלל, F היא נקודה במישור. הישרים FA ו-DE נחתכים ב-G. הישרים FB ו-CD נחתכים ב-H. מצאו את כל הנקודות F עבורן הישרים CG, DF ו-EH נפגשים בנקודה.

8. על השולחן מונחים כרטיסים שעל הצד הקדמי שלהם רשומים המספרים 1, 2, 3, ..., 5783 (כל מספר מופיע פעם אחת בדיוק). הכרטיסים מונחים עם המספר כלפי מטה. גיא טוען שאם הוא יבחר באופן אקראי K כרטיסים מהשולחן, מתוך הכרטיסים שיהיו לו הוא יוכל לבחור תת-קבוצה לא ריקה שבה סכום המספרים מתחלק ב-5783. האם גיא צודק בהנחה ש-

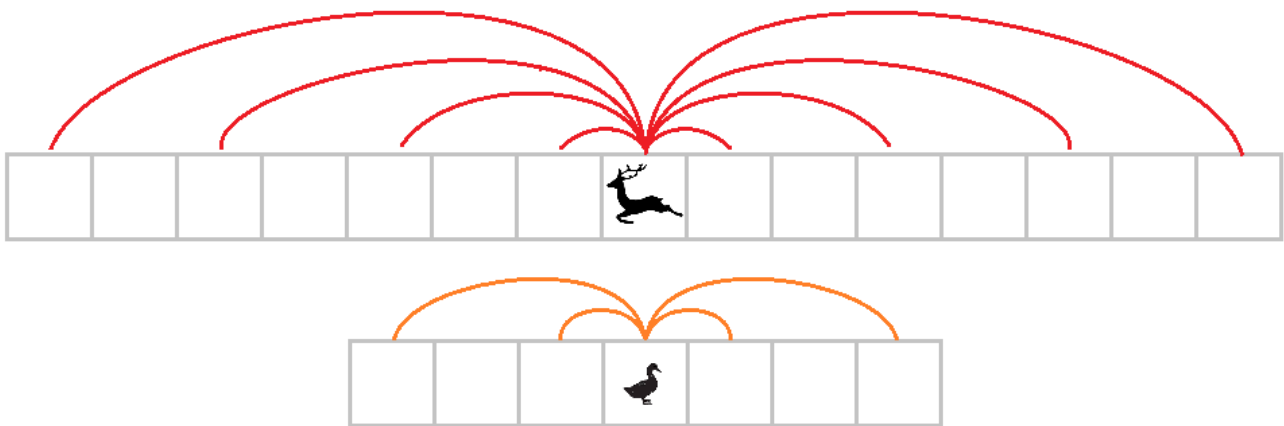
$$K = 100, \quad \text{ב. } K = 700$$

בהצלחה!

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. איילה וברווז משחקים משחק על פס משבצות 1×1001 . הם מתחילים כשהם נמצאים על זוג המשבצות הקיצוניות, ואיילה מתחילה. בכל תור של איילה, היא יכולה לקפוץ מהמשבצת שלה למשבצת במרחק של 1, 3, 5 או 7 בכל כיוון. בכל תור של ברווז, הוא יכול לקפוץ מהמשבצת שלו למשבצת במרחק 1 או 3 בכל כיוון. על מנת לנצח יש לקפוץ למשבצת שהלוטרה האחרת נמצאת בה. למי יש אסטרטגיה מנצחת?



2. נקודה G נעה על הישר AC כאשר ABCDEF הוא משושה משוכלל קבוע. המעגלים החוסמים של GBE ו-GDF נחתכים בנקודות G ו-H. הראו כי המקום הגיאומטרי של הנקודה H הוא מעגל.

3. למספר שלם חיובי N יש מספר זוגי של מחלקים (כולל הוא עצמו). ליאור רוצה לרשום את המחלקים של N על לוח, מחולקים לשורות. הוא רוצה שבכל שורה יהיו שני מספרים, שבכל השורות חוץ מהשורה האחרונה מכפלת המספרים תהיה זהה, ושבשורה האחרונה המכפלה תהיה שונה. עבור אילו ערכי N השאיפה של ליאור יכולה להתגשם?

4. הראו כי לכל ארבעה מספרים חיוביים a, b, c, d מתקיים

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1 + abcd \geq ab + ac + ad + bc + bd + cd.$$

בהצלחה!

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. ליד כל קודקוד של מחומש משוכלל רשום מספר ממשי. חמשת המספרים שונים זה מזה. שלישייה של קודקודים נקראת מוצלחת אם הם יוצרים משולש שווה-שוקיים כך שהמספר שרשום ליד קודקוד הראש גדול יותר משני המספרים ליד קודקודי הבסיס או קטן יותר משני המספרים ליד קודקודי הבסיס. מצאו את הכמות המקסימלית האפשרית של שלישיות מוצלחות.

2. נתונה פירמידה SABCDE שבסיסה מחומש משוכלל ABCDE והפאות הנוספות הן משולשים חדי-זוויות. הגבהים מ-S לצלעות הבסיס מחלקים את חמש הפאות המשולשות לעשרה משולשים שצבועים לסירוגין באדום ובכחול. הוכיחו כי סכום ריבועי שטחי המשולשים הכחולים שווה לסכום ריבועי שטחי המשולשים האדומים.

3. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ כך שלכל $x, y \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$f(x + f(y))^2 + f(y + f(x))^2 = f(f(x) + f(y))^2 + 1.$$

בהצלחה!