27/6/2022 **מחנה קיץ** כ"ח בסיוון תשפ"ב

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. נתונה רשימה S של מספרים ממשיים שונים מ-0. באה יונה, וכותבת בשורה על הלוח לכל זוג מספרים a ו-b ב-S את $a-b$ ו-$b-a$. לאחר מכן בא נץ וכותב בשורה אחרת על הלוח לכל זוג מספרים a ו-b ב-S את $\frac{a}{b}$ ו-$\frac{b}{a}$. בסוף מראים לטווס את שתי השורות שנוצרו. האם טווס יכול לדעת איזו שורה כתבה יונה, ואיזו שורה כתב נץ?

2. איילה וברווז משחקים משחק על לוח בגודל $n \times 4$, בתחילת המשחק על כל משבצת מונח מטבע דו-צדדי כאשר צד אחד שחור והצד השני לבן, עם הצד השחור כלפי מעלה. לאחר מכן בכל תור השחקן שתורו בוחר מלבן שמורכב ממשבצות עם לפחות שתי שורות ולפחות שתי עמודות, כך שבמשבצת השמאלית עליונה מונח מטבע שחור, והופך את 4 המטבעות בפינות המלבן. שחקן שאינו יכול לבצע מהלך מפסיד. בהנחה שאיילה מתחילה מי מנצח? (התשובה יכולה להיות תלויה ב-n.)

3. נגדיר a_n להיות הספרה הימנית ביותר של $n!$ ששונה מ-0. מצאו את כל הספרות שמופיעות בסדרה $\{a_n\}$ אינסוף פעמים.

4. נתון משולש ABC, נסמן את השיקוף של A מבעד ל-BC ב-A'. המעגל $AA'B$ נחתך עם הישר AC בנקודות A ו-D והמעגל $AA'C$ נחתך עם הישר AB בנקודות A ו-E. הישרים BD ו-CE נחתכים ב-P. נסמן ב-Q את מרכז המעגל החוסם של ADE. הוכיחו כי $PQ \parallel BC$.

בהצלחה!

27/6/2022 **מחנה קיץ** כ"ח בסיוון תשפ"ב

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. מצאו את כל השלמים החיוביים n המקיימים את התכונה הבאה: קיים סידור $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ של k המחלקים החיוביים של n כך שלכל $i = 1,2,\dots,k$ המספר $d_1 + \dots + d_i$ הוא ריבוע שלם.

2. נתון $n \geq 2$ שלם, ו-$a_1, a_2, \dots, a_n$ מספרים ממשיים חיוביים כך ש-$a_1 + \dots + a_n = 1$. הוכיחו כי:

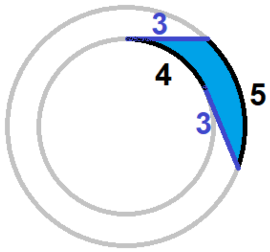
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_k}(a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1})^2 < \frac{1}{3}$$

3. נתונים מספרים שלמים n, k כך ש-$n > k \geq 1$. $2n + 1$ תלמידים עומדים במעגל, לכל תלמיד S יש $2k$ *שכנים*: k התלמידים העומדים משמאלו וk התלמידים העומדים מימינו. נניח בנוסף ש-$n + 1$ מהתלמידים הן בנות, וה-n הנותרים הם בנים. הוכיחו שיש בת שלפחות k מהשכנים שלה הן בנות.

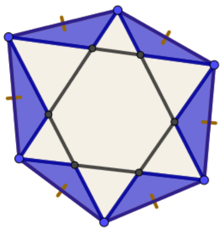
בהצלחה!

כ"ט בסיוון תשפ"ב **מחנה קיץ** 28/6/2022

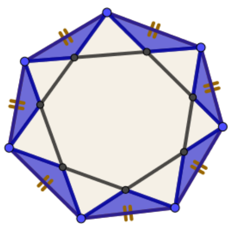
תחרות קבוצתית



1. בציור רואים מרובע כחול ששתי צלעות נגדיות שלו הן קטעים כחולים באורך 3 ושתי הצלעות האחרות הן קשתות שחורות של מעגלים בעלי מרכז משותף, כאשר אורכי הקשתות הם 4 ו-5 יחידות אורך. הקטעים הכחולים משיקים למעגל הקטן, ומכוונים את שניהם עם כיוון השעון של המעגל הקטן. מצאו את השטח של המרובע העקום.



2. מהי הכמות המקסימלית האפשרית של נקודות שניתן לסמן במישור, כך שמבין כל 4 נקודות מסומנות, יש 3 נקודות שיוצרות משולש משוכלל?



3. במצולע שווה צלעות P מעבירים אלכסונים שמחברים שני קודקודים סמוכים לקודקוד מסוים, עבור כל קודקוד. האלכסונים מחלקים את המצולע למספר חלקים; החלקים שסמוכים לצלעות של P הם משולשים בצבע כחול. נתון שלכל המשולשים הכחולים יש שטח זהה. האם בהכרח P הוא מצולע משוכלל,

א. כאשר P הוא משושה?

ב. כאשר P הוא משובע?

4. איילה וברווז משחקים משחק, בתחילת המשחק ברווז בוחר n נקודות במישור כך שאף שלוש לא על ישר. לאחר מכן, בכל סיבוב איילה בוחרת שלושה קודקודים שלא כל הקטעים ביניהם מצוירים (לדוגמא מותר לה לבחור את אותה שלשה שוב), ואז ברווז בוחר את אחד הקטעים בין הקודקודים שעוד לא צויר, ומצייר אותו. ברווז מנצח ברגע ששניים מהקטעים נחתכים (שלא באחד הקודקודים). כמה תורות איילה יכולה להבטיח שיעברו לפני שברווז מנצח (כתלות ב-n)?

5. נגדיר $f^{\circ n}(x)=f\left(f\left(\ldots\left(f(x)\right)\right)\right)$ כאשר באגף ימין f רשום n פעמים. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$ עבורן $\left(f(x)\right)^{f(y)}=f^{\circ f(y)}(x)$, לכל $x,y\in\mathbb{Z}_{>0}$.

6. פתרו בשלמים: $5m^3n^3\left(m^3+n^3\right)\left(m^6+m^3n^3+n^6\right)+n^{15}=3m^5k^5\left(m^5+k^5\right)+k^{15}$.

7. במשולש ABC, הגבהים נפגשים בנקודה H. המשיק למעגל החוסם בנקודה A חותך את המשך הצלע BC בנקודה T. האמצעים של הקטעים AH, AT ו-BC הם P, N ו-M בהתאמה. הנקודה I היא עקב האנך מ-P ל-MN. הראו כי המרובע PITA חסום במעגל.

8. יהיו a,b,c מספרים לא שליליים המקיימים $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\geq\frac{9}{4}$.

הראו כי $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}\leq\sqrt{(a+b+c)(a+b+c+4)}$.

בהצלחה!

29/6/2022 **מחנה קיץ** ל' בסיוון תשפ"ב

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. נתון n אי-זוגי ולוח משבצות $n\times n$. בהתחלה יש חייל במרכז הלוח ואז איילה וברווז משחקים משחק. איילה בתורה מזיזה את החייל משבצת אחת ימינה או משבצת אחת שמאלה, ברווז בתורו מזיז את החייל משבצת אחת למעלה או משבצת אחת למטה. אסור לחייל לבקר שוב במשבצת שכבר היה בה, איילה מתחילה ומי שלא יכול לעשות מהלך מפסיד. למי יש אסטרטגיה מנצחת?

2. מצאו את ה-m המינימלי עבורו לכל n שלם קיימים מספרים שלמים $a_1,...,a_m,b$ עבורם מתקיים

$$a_1^9+\cdots+a_m^9+127b=n.$$

3. האם קיימת פונקציה $f:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{R}$ כך שלכל t הפונקציה $u(x)=f(x,t)$ והפונקציה $v(y)=f(t,y)$ הן פולינומים אך f אינה פולינום?

4. נתון מצולע שווה צלעות בעל 2891 קודקודים ונקודה P בתוכו. מורידים אנכים לכל הצלעות, שחותכים את הצלעות המתאימות בנקודות פנימיות, ומחברים את P לקודקודים וכך מתקבלת חלוקה של המצולע ל-5782 משולשים. צובעים את המשולשים לסירוגין באדום וכחול. הוכיחו כי סכום רדיוסי המעגלים החסומים במשולשים הכחולים שווה לסכום רדיוסי המעגלים החסומים במשולשים האדומים.

בהצלחה!

29/6/2022 **מחנה קיץ** ל' בסיוון תשפ"ב

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. ניצן בוחר מספר בין 1 ל-2^{2022}. בילבו כותב הודעה עם אותיות a,b,c באורך 4044. אחר כך ניצן בא ומוחק את כל האותיות מסוג מסוים בהודעה (כלומר, את כל ה-a, או את כל ה-b, או את כל ה-c). האם גנדלף יכול לדעת מה המספר המקורי שניצן בחר לפי ההודעה המחוקה?

הערה: ההודעה המחוקה לא כוללת רווחים במקומות בהם נמחקה אות.

2. נתונה פונקציה $f:\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ עם התכונה הבאה:

לכל מספר שלם C, הפונקציות $f(C,x), f(x,C), f(x,x+C), f(x,C-x)$ כפונקציות במשתנה אחד, הן פולינום ממעלה לכל היותר 100. הוכיחו ש-f היא פולינום בשני משתנים, ומצאו את המעלה המקסימלית שיכולה להיות לו.

הערה: המעלה של המונום $x^a y^b$ היא $a+b$, והמעלה של פולינום כללי היא המקסימום על פני כל מעלות המונומים שלו.

3. נתון משולש ABC עם מרכז מעגל חסום I ומרכז מעגל חוסם O. נסמן ב-H את מפגש הגבהים במשולש BIC. נסמן ב-T את הנקודה על המעגל החוסם של ABC עבורה $\measuredangle ATI = 90^\circ$. נסמן ב-X את החיתוך השני של המעגל החוסם של AOI וישר HI. הוכיחו כי חיתוך הישרים HT ו-AX נמצא על המעגל החוסם של ABC.

בהצלחה!