

אינטגרלים

1. מה גדול יותר $1.01^{100.5}$ או e ?

2. הוכיחו את הזהויות:

$$\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{m+1} \binom{n}{m} = \frac{1}{n+1} \quad \text{ב.} \quad \sum_{m=1}^n \frac{1}{m+1} \binom{n}{m} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{m} \binom{n}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \binom{n}{1} + \frac{1}{2n-3} \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = \frac{(-1)^n 2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{ד.}$$

$$\sum_{m=0}^n \frac{1}{\binom{n}{m}} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^{n+1}}{n+1} \right) \quad \text{ה.}$$

3. תהי סדרה עולה של שלמים אי-שליליים. נסמן ב- a_j את כמות ה- i -ים עבורם $x_i \leq j$, ידוע ש- a_j סופי לכל j . הוכיחו כי לכל m, n שלמים חיוביים

$$\sum_{i=0}^n x_i + \sum_{i=0}^m a_i \geq (n+1)(m+1)$$

4. נתונים $0 = a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n = 0$ ו- $0 \leq b_1, \dots, b_n$ מספרים ממשיים ו- $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 2$. ידוע שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים ש- $|a_i - a_{i-1}| \leq b_i$. הוכיחו כי

$$\sum_{i=1}^n (a_i + a_{i-1}) b_i \leq 2$$

5. בשורה כתובים שני מספרים: 0 ו-1. בכל שלב מתבצעת אוטומטית הפעולה הבאה: בין כל

שני מספרים a ו- b שמופיעים ברצף נכתב המספר $\left(\frac{\sqrt[15]{a} + \sqrt[15]{b}}{2} \right)^{15}$. אחרי שלב אחד יש

בשורה 3 מספרים, לאחר שני שלבים 5 מספרים וכו'. כעבור 15 שלבים כתובים בשורה די הרבה מספרים. מצאו את החלק השלם של הסכום שלהם.

6. לכל $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ ממשיים חיוביים מתקיים ש-

$$\left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(a_i, b_j) \right)^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(a_i, a_j) \cdot \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(b_i, b_j) \quad \text{א.}$$

$$0 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_i b_j \min(a_i, a_j) \quad \text{ב.}$$

הוכיחו כי בסעיף ב אי-השוויון נכון גם כאשר ה- b -ים לאו דווקא חיוביים.

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (|b_i - b_j| + |a_i - a_j|) \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |b_i - a_j| \quad \text{ג.}$$

7. לכל x, y ממשיים חיוביים ו- m, n שלמים חיוביים הוכיחו את אי-השוויון

$$(n-1)(m-1)(x^{m+n} + y^{m+n}) + (m+n-1)(x^m y^n + x^n y^m) \geq mn(x^{m+n-1} \cdot y + y^{m+n-1} \cdot x)$$

8. הוכיחו כי לכל a, b, c חיוביים מתקיים

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a+4b} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{a+2b+2c} \quad \text{א.}$$

$$\frac{3}{a+b+c} + \frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3c} \geq \sum_{cyc} \left(\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+a} \right) \quad \text{ב.}$$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a+(k+1)b} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{a+kb+c} \quad \text{ג. לכל } k \text{ חיובי}$$

$$\sum_{cyc} \left(\frac{1}{4a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq \sum_{cyc} \frac{3}{3a+b} \quad \text{ד.}$$

9. עבור a_1, \dots, a_n מספרים ממשיים הוכיחו כי

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_i a_j}{i+j-1} \geq 0 \quad \text{א.}$$

$$\left(\sum_i^n a_i \right)^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{ij}{i+j-1} a_i a_j \quad \text{ב.}$$

ג. לכל p_1, \dots, p_n ו- $c > 0$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_i a_j}{(p_i + p_j)^c} \geq 0$$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_i a_j}{1 + |i-j|} \geq 0 \quad \text{ד.}$$