

מחנה חורף, רותם, 16.01.2022

1. יהי a, b ו- c מספרים חיוביים, אשר מכפלתם היא 1. הוכיחו כי:

$$\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1} \geq 1 \quad (\text{א})$$

$$\frac{a+1}{a^2 + a + 1} + \frac{b+1}{b^2 + b + 1} + \frac{c+1}{c^2 + c + 1} \leq 2 \quad (\text{ב})$$

2. יהי a, b ו- c מספרים חיוביים עבורם $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

$$\frac{a}{a + \sqrt{3 + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{3 + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{3 + ab}} \leq 1 \quad \text{הוכיחו כי:}$$

3. יהי a, b ו- c מספרים חיוביים.

$$\frac{a}{a + \sqrt{a^2 + 3bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{b^2 + 3ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{c^2 + 3ab}} \leq 1 \quad \text{הוכיחו כי:}$$

4. יהי a, b ו- c מספרים חיוביים, אשר מכפלתם היא 1. הוכיחו כי:

$$\sqrt{\frac{a+1}{a^2 + 16a + 1}} + \sqrt{\frac{b+1}{b^2 + 16b + 1}} + \sqrt{\frac{c+1}{c^2 + 16c + 1}} \geq 1 \quad (\text{א})$$

$$\sqrt{\frac{a+1}{4a^2 + 10a + 4}} + \sqrt{\frac{b+1}{4b^2 + 10b + 4}} + \sqrt{\frac{c+1}{4c^2 + 10c + 4}} \leq 1 \quad (\text{ב})$$

$$\frac{a}{a^{10} + 1} + \frac{b}{b^{10} + 1} + \frac{c}{c^{10} + 1} \leq \frac{3}{2} \quad (\text{ג})$$