# אינדוקציה

## אלגברה ותורת המספרים:

1. כמה פעמים המספר 111....111, המורכב מ-$3^n$ ספרות, מתחלק ב-3?

2. נתון כי עבור $x$ ממשי כלשהו $x+\frac{1}{x}$ שלם. הוכיחו כי לכל $n$ טבעי המספר $x^n+\frac{1}{x^n}$ גם הוא שלם.

3. $n$ מספר טבעי, מה יותר גדול $3^n$ או $n^3$?

4. הוכיחו כי קיים מספר שלם $n$ כך שברישום העשרוני של $n\cdot 2^{1000}$ לא מופיעים אפסים.

5. הוכיחו כי לכל $n,k$ טבעיים מתקיים ש-

$$1^k+2^k+\ldots+n^k \le \frac{n^{2k}-(n-1)^k}{n^k-(n-1)^k}$$

6. הסדרה ... $a_0, a_1, a_2,$ מוגדרת כך: $a_0=1$, ואז $a_{n+1}=a_n-2$ אם הוא מספר חיובי שעוד לא הופיע בסדרה, אחרת $a_{n+1}=a_n+3$. הוכיחו כי לכל $k$ אם $a_k$ הוא מספר ריבועי אז $a_k>a_{k-1}$.

## גיאומטריה קומבינטורית:

1. נתון מצולע קמור. הצלעות שלו צבועות בשני צבעים, ככה שמבחוץ הן ורודות, ומבפנים, כחולות. ציירו חלק מהאלכסונים שלו (אף שלשה אלכסונים לא נחתכים בנקודה), וכל אלכסון צבוע מצד אחד בכחול, ומצד שני בורוד. הוכיחו שיש מצולע קמור שצבוע מבפנים בכחול ומבחוץ בורוד, ושבתוכו לא עוברים אלכסונים אחרים.

2. מהי הכמות המרבית של אלכסונים שניתן לסמן במצולע קמור עם $N$ צלעות כך שלכל שני אלכסונים מסומנים תהיה נקודה משותפת?
הערה: בשאלה זו צלע נחשבת לאלכסון.

3. במצולע משוכלל עם $N$ צלעות סומנו מספר אלכסונים. אלכסון מסומן יקרא מגניב אם הוא חותך (בנקודה פנימית) לכל היותר אלכסון מסומן אחד. מה היא הכמות האפשרית הגדולה ביותר של אלכסונים מגניבים?

4. נתון מצולע קמור עם $N$ צלעות. בכל שלב ניתן להעביר אלכסון של המצולע שחותך לכל היותר אלכסון אחד שהועבר לפני שלב זה. מה היא הכמות המרבית של אלכסונים שניתן להעביר באופן זה?

5. נתון מצולע קמור. ציירו חלק מהאלכסונים במצולע, כך שאף שניים לא נחתכים, שמחלקים את המצולע למשולשים. מתברר שכל המשולשים הם חדי זווית. הראו שניתן לעשות כזה דבר לכל היותר בדרך אחת.

## גרפים ולוחות:

1. בטורניר השתתפו מספר שחקני טניס, וכל שניים שיחקו משחק אחד בדיוק, בו אחד השחקנים ניצח. הוכיחו כי ניתן לסדר את השחקנים בשורה כך שכל אחד חוץ מהימני ביותר ניצח את השחקן שעומד לימינו.

2. לקחו משולש שווה צלעות עם אורך צלע $2^n$ וחילקו אותו ל-$4^n$ משולשים שווי צלעות עם אורך צלע 1. מחקו משולש קטן בקודקוד של הצורה הגדולה. הוכיחו שניתן לרצף את הצורה שנותרה עם טרפזים שמורכבים מ-3 משולשים שווי צלעות קטנים. (כמו בתמונה הקטנה משמאל) 

3. נתון שדה ריבועי, ואיפשהו בתוכו עומד עז. על כל קודקוד של הריבוע עומד רועה צאן. העז הוא חכם, ועל כן, כל פעם שרועה צאן כלשהו מוחא כף, העז רץ בדיוק חצי מהדרך אליו, ואז עוצר. במקום אחר בתוך השדה מצוייר עיגול גיר קטן. הוכיחו כי רועי הצאן יכולים (בעזרת עבודת צוות) לגרום לעז לעמוד בתוך העיגול.

4. במדינה "פיסות אדמה מעל מים" יש $N$ איים. למדינה יש 3 חברות שמסיעות אנשים באוניות בין איים, ולכל זוג ערים, בדיוק אחת מהחברות מציעות אוניה שיודעת להגיע בין אחת לשנייה. יום אחד המדינה גילתה קשיים קציביים, והחליטה לסגור שניים מתוך שלשת חברות ההסעות. הוכיחו כי הם יכולים לבחור את החברות שהם סוגרים, כך שאחרי הסגירה תהיה קבוצה כלשהי עם לפחות $\frac{N}{2}$ איים, שעדיין יהיה ניתן להגיע מכל אחת לכל אחת אחרת. (אף שבטח תדרש לכך יותר מאוניה אחת)

5. לאולימפיאדה במתמטיקה הגיעו $2018$ מתחרים, חלקם מכירים מראש וכל מתחרה מכיר לפחות מתחרה אחד. קבוצת מתחרים תקרא *חוג* אם כל שני אנשים מהקבוצה מכירים וכל מתחרה אחר באולימפיאדה לא מכיר לפחות מישהו אחד מהקבוצה. הוכיחו כי ניתן להושיב את התלמידים ב-$90$ אולמות כך שלא יהיה אולם שבו ישבו כל המשתתפים של חוג מסוים.