

מספרים וקומבי

1. על הלוח רשומים כל המספרים מ-1 עד 100 (כל מספר רשום פעם אחד). כל עוד זה מתאפשר, גיא בוחר שני מספרים שהספרה האחרונה (הימנית) שלהם זהה, מוחק את שניהם ורושם את הסכום שלהם על הלוח. כמה מספרים יישארו בסוף?
2. על הראשים של 13 גמדים מלבישים 13 כובעים, כאשר על כל כובע רשום מספר מ-1 עד 13. הם יכולים לראות את המספרים של האחרים אבל לא את המספר של עצמם. הם יכולים לתאם אסטרטגיה מראש, לפני שהם קיבלו את הכובעים. כל אחד רושם על דף נייר את שמו ואת הניחוש שלו למספר שרשום על הכובע. האם קיימת שיטה כזאת, שלפחות אחת מהם ינחש נכון את המספר שלו?
3. על הלוח רשומים המספרים $4, 14, 24, \dots, 94, 104$. בשלב ראשון מוחקים מספר אחד, בשלב שני מוחקים עוד שני מספרים, בשלב שלישי מוחקים עוד 3 מספרים, בשלב רביעי עוד 4 מספרים. האם יתכן שבכל שלב סכום המספרים שרשומים על הלוח מתחלק ב-11?
4. כשרושמים מספר a פעמיים ברצף ומקבלים מספר b . נתון כי b מתחלק ב- a^2 . מצאו את כל הערכים האפשריים של $\frac{b}{a^2}$.
5. על קטע $[0, 1]$ סומנו $p-1$ נקודות אדומות $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{p-1}{p}$ בנוסף $q-1$ נקודות כתומות $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}$. אחרי זה מחלקים את הקטע ל- $p+q$ שווים. הראו שבאף קטע לא נמצאות שתי נקודות צבעוניות.
6. שתי סדרות עולות של מספרים שלמים אי-שליליים $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ ו- $\{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ בנויות כך, $b_n - a_n = n$, וכל מספר אי-שלילי שלם באחת מהסדרות (אבל לא בשתיהן). הראו כי $b_n = a_{n+1} + 1$.
7. תארו את כל זוגות המספרים החיוביים α, β כך שכל מספר טבעי יופיע פעם אחת בדיוק באחת משתי שורות, כאשר בשורה הראשונה רשומים המספרים $[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], [4\alpha], \dots$ ובשורה השנייה רשומים המספרים $[\beta], [2\beta], [3\beta], [4\beta], \dots$.
8. נתונים שתי ערמות של דגים. איילה וברווז משחקים בתורות, איילה מתחילה. בכול תור אפשר לקחת כמות כלשהי של דגים מערמה אחת בלבד, או אותה כמות דגים משתי הערמות. המנצח הוא מי שלוקח את הדג האחרון. תארו את כל מצבי ההתחלה שבהם איילה יכולה לנצח.
9. מספרים טבעיים פוצלו למספר סופי של סדרות חשבוניות (יותר מ-2). הראו כי יש שתי סדרות עם אותו הפרש.