דוגמאות.

1. יש גרף דו-צדדי כך שיש לכל הקודקודים בצד מסוים אותה כמות של שכנים. הוכיחו כי יש זיווג כך שאחד הצדדים מוכל כולו בזיווג.
הערה: לקודקודים שלא באותו צד יכולים להיות כמויות שונות של שכנים.

2. נתון גרף דו-צדדי, כל צד שלו בגודל $2n$. בהנחה שתנאי Hall מתקיים לכל קבוצה עד גודל n כולל, אך משני הצדדים, הוכיחו שיש זיווג מושלם.

שאלות.

1. קבוצה בגודל 400 מחולקת ב-2 דרכים לאיחוד זר של 20 קבוצות שגודלם 20 איברים: $\left\{A_i\right\}_{i=1}^{20}$ ו- $\left\{B_i\right\}_{i=1}^{20}$. הוכיחו כי קיימת תמורה של $\left\{B_i\right\}_{i=1}^{20}$ כך שלכל i מתקיים $A_i \bigcap B_i \neq \varnothing$.

2. יש 7 לוטרות ו-28 מתחרים. לכל לוטרה יש מספר תלמידים שהיא אוהבת. הראו כי ניתן לחלק את התלמידים ל-7 צוותים בגודל 4, שכל צוות מנוהל על ידי לוטרה שאוהבת אותם, אם ורק אם לכל k לוטרות איחוד קבוצות התלמידים שהן אוהבות הוא לפחות $4k$.

3. טבלה ריבועית מלאה באחדות ואפסים, כך שבכל קבוצת צריחים מקסימאלית הלא מאימים זה על זה מופיע אחד. הוכיחו כי קיימים מספרים שלמים i, j עבורם $i+j \geq n+1$ וקיימים i שורות ו- j עמודות, כך שכל החיתוכים של i השורות עם j העמודות הם אחדים.

4. בטבלה M שורות, N עמודות. "מהלך אופקי" זו תמורה של איברי הטבלה שבה כל איבר נשאר באותה שורה בה הוא כבר היה. באופן דומה מגדירים "מהלך אנכי".

מצא את K הקטן ביותר, כך שאפשר לבצע כל תמורה של איברי הטבלה ב-K מהלכים.