הערכות בציורים

הגדרה: שני מצולעים קמורים נקראים "צמודים" אם הם חולקים צלע משותפת (קטע ושני קודקודים), והחיתוך שלהם לא ריק (קיימת נקודה במישור שנמצאת בתוך שני המצולעים).

1. הראו שלכל משולש, קיים ריבוע שמכיל את המשולש, וצמוד לו.

2. ישרים l_1 ו-l_2 מקבילים, והנקודה X במרחק שווה משניהם. מעגל Ω, עם מרכז ב-Y, חותך את הישר l_1 בנקודות A ו-B, ואת הישר l_2 בנקודות C ו-D, כך שהמרובע $ABCD$ קמור. האלכסונים AC ו-BD במרובע נפגשים בנקודה P. הראו כי זווית XPY היא חדה.

3. יהי Δ משולש, ו-$0^\circ < \alpha < 180^\circ$. על כל צלע של Δ, מציירים משולש שווה שוקיים צמוד, עם זווית ראש α (המשולש שווה השוקיים חולק את הבסיס שלו עם Δ). הראו כי קיים ערך של α, כך שאיחוד שלשת המשולשים שווי השוקיים הצמודים מכיל את Δ, לכל בחירה של Δ. מהו הערך המקסימאלי של α עבורו התנאי מתקיים?

4. נתון מצולע קמור במישור עם k צלעות. על כל צלע של המצולע, ציירו מצולע משוכלל עם k צלעות, שצמוד למצולע המקורי. הראו כי איחוד כל המצולעים המשוכללים מכיל את המצולע הקמור המקורי.

5. בתוך משולש ABC בחרו נקודה P. הישרים AP, BP, CP חותכים את צלעות המשולש בנקודות A_1, B_1, C_1. את השיקופים של P ביחס ל-A_0, B_0, C_0 נסמן A_0, B_0, C_0. הראו כי לא ייתכן ש-A_1, B_1, C_1 כולן יהיו בתוך המעגל החוסם של ABC.

6. יהיו γ, β, α שלושה משולשים משוכללים במישור. נתון שהמרכז של כל אחד מהמשולשים, הוא קודקוד של לפחות אחד מהמשולשים האחרים. נניח שחיתוך הפנים של שלושת המשולשים הוא ריק. הראו כי לפחות שניים מהמשולשים הם חופפים.

7. במשולש ABC כל הזוויות קטנות או שוות ל-100°, הנקודות C_1, B_1, A_1 הן עקבי חוצי הזויות הפנימיים. הראו כי הזוויות של המשולש $A_1B_1C_1$ חדות.

8. יהי ABC משולש חד-זווית. על כל אחת משלושת הצלעות (AC, BC, AB), מציירים משושה משוכלל שצמוד למשולש ABC. הראו שאיחוד שלושת המשושים מכיל את המעגל החוסם של ABC.

9. יהי ABC משולש חד-זווית עם מעגל חוסם Ω. נסמן ב-F, E, D את אמצעי הקשתות AB, AC, BC של Ω. הראו כי מרכז המעגל החסום במשולש DEF נמצא בתוך המשולש ABC.

10. במרובע קמור $ABCD$ מתקיים:

$$\begin{cases} \sphericalangle ACD + \sphericalangle BCD < 180^\circ \\ \sphericalangle ADC + \sphericalangle BDC < 180^\circ \end{cases}$$

חוצי זוויות של $\sphericalangle CAD$ ו-$\sphericalangle CBD$ פוגשים את CD בנקודות P ו-Q. הראו כי הנקודות C,Q,P,D נמצאות על הישר CD בסדר הזה.

11. יהי ABC משולש חד זווית. האנך האמצעי של BC חותך את הישרים AC, AB בנקודות A_1 ו-A_2. נסמן ב-A' את אמצע הקטע A_1A_2. נגדיר את הנקודות B' ו-C' באופן סימטרי.
הוכיחו כי: $S_{A'B'C'} \geq S_{ABC}$.

בתיאבון!