

# משחקים

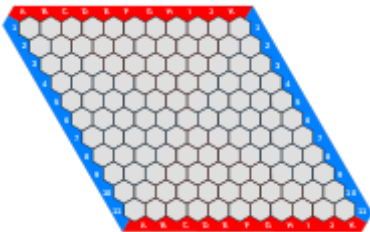
בכל אחד מהמשחקים הבאים, נסו להבין לאיזה שחקן יש אסטרטגיה מנצחת. יתכן שהתשובה תלויה בפרמטרים (כמו גודל הלוח או המצב ההתחלתי).

אילה תמיד עושה את המהלך הראשון

1. על הלוח רשומים המספרים  $1, 2, 3, \dots, n$ . בכל מהלך ניתן לבחור מספר ולמחוק אותו. וכל מספר שמחלק אותו מהלוח. מי שמוחק את המספר האחרון מנצח.
2. אילה וברוזה משחקים במשחק הבא: בהתחלה על השולחן מונחות 11 ערימות של 10 אבנים כל אחת. כל שחקן בתורו לוקח 1, 2 או 3 אבנים, אבל אילה במהלך שלה לוקחת את כל האבנים מערימה אחת, וברוזה לוקח את כל האבנים מערימות שונות. אילה מתחילה. מי שלא יכול לבצע מהלך מפסיד.

3. ריבוע  $9 \times 9$  מורכב מגפרורים. על כל צלע של כל משבצת (כולל הפנימיות), מונח גפרור בודד. עופר וטל מסירים גפרורים מהלוח בתורות – גפרור אחד בכל תור. עופר משחק ראשון. המשחק מסתיים כאשר לא נשאר אף ריבוע  $1 \times 1$  המורכב מגפרורים, והשחקן ששיחק אחרון מנצח.

4. באצטדיון מעגלי  $n$  נורות. ליד כל נורה כפתור השולט עליה. בהתחלה אילה מדליקה חלק מהנורות. בכל תור ברוזה נותן לאילה תבנית הלוחצת על חלק מהכפתורים. אילה יכולה לסובב אותה ולאחר מכאן ללחוץ על הכפתורים לפי התבנית. אם בשלב כלשהו כל הנורות כבויות אילה מפסידה. אם לאחר כל מספר סופי של מהלכים עדיין יש נורה דלוקה אילה מנצחת.



5. (HEX) נתון לוח משושים בגודל  $11 \times 11$  כמו בצירור. בכל תור אחד השחקנים צובע את אחד המשושים בצבע שלו. מי שמצליח לקשר את צידי הלוח בשרשרת של משושים בצבע שלו מנצח.

6. איילה וברוזה משחקים משחק על לוח  $2020 \times 2020$ . כל אחד בתורו צובע משבצת של הלוח שטרם נצבעה ומקבל כמות נקודות כמות המשבצות הצבועות בשורה ועמודה של המשבצת שבחר לצבוע. בסוף המשחק כל שחקן סוכם את כמות הנקודות שקיבל, מי שמקבל יותר נקודות מנצח. מי ינצח ובכמה נקודות?

7. נתון מספר שלם  $N > 1$ . אילה וברוזה לפי התור מסמנים נקודות על המעגל: אילה באדום וברוזה בכתום. כאשר סומנו  $N$  נקודות מכל צבע, המשחק מסתיים. בסוף המשחק, כל שחקן מוצא את הקשת הארוכה ביותר שהקצוות שלה הם בצבע שלו, ועליה אין נקודות מסומנות נוספות. זה שיש לו את הקשת הארוכה יותר מנצח (אם האורכים שווים, או שאין קשתות שקצוותיהן באותו צבע, מכריזים על תיקו).

8. לאילה וברוזה חמישה דליים ריקים בגודל שני ליטרים העומדים במעגל. הם משחקים במשחק הבא: בכל תור של אילה היא מרוקנת בקבוק של ליטר מים לתוך חמשת הדליים כרצונה. בכל תור של ברוזה הוא בוחר שני דליים רצופים ומרוקן אותם. אילה תנצח אם היא תצליח לגרום לאחד הדליים "לעלות על גדותיו", אחרת ברוזה ינצח.

9. אילה וברווז יוצאים לטיול בארכיפלג 2009 האיים (אזור בתוך הים שמורכב מ-2009 איים). זוגות מסוימים של איים מחוברים במסלולי סירות דו-כיווניים. אילה וברווז משחקים משחק בזמן הטיול: אילה בוחרת את האי הראשון בו יעגנו. כל אחד בתורו בוחר מהו האי הבא אליו הם מפליגים, מבין האיים בהם עוד לא ביקרו. ברווז בוחר ראשון. השחקן שאין לו מהלך חוקי, מפסיד.

10. לאילה וברווז לוח משבצות בגודל  $1 \times 2000$ . כל אחד בתורו רושם את האות "ס" או את האות "ו" באחת מהמשבצות הריקות על פי בחירתו. מי שיוצר את המילה "סוס" מנצח. אם לאחר שכל הלוח התמלא לא נוצרה המילה "סוס" מוכרז תיקו. מה תהיה תוצאת המשחק?

11. אילה וברווז ומשחקים משחק על דף משבצות אינסופי. כל אחד בתורו מצייר חץ על אחת הצלעות של אחת המשבצות (אסור לצייר שני חצים על אותה צלע). ברווז מנצח אם בשלב מסוים החצים המצוירים יוצרים מעגל. האם לברווז יש אסטרטגיה מנצחת?

12. אילה וברווז משחקים על גרף עם  $n$  קודקודים. בתחילת המשחק הגרף ריק ובכל תור השחקן מוסיף קשת לגרף. מי שיוצר מעגל אי-זוגי בגרף מפסיד.

13. אילה וברווז משחקים על גרף עם 2000 קודקודים. בתחילת המשחק הגרף מלא. איילה בכל מהלך שלה יכולה למחוק קשת מהגרף ואילו ברווז יכול למחוק 2 או 3 קשתות מהגרף. מי שיוצר קודקוד מדרגה 0 מפסיד.

14. נתון לוח משבצות  $49 \times 69$ , כל  $50 \cdot 70$  הקודקודים שלו צבועים באדום. אילה וברווז, כל אחד בתורו בוחר שני קודקודים אדומים מאותה שורה או אותה עמודה, צובע אותם בכחול ומעביר את הקטע שמחבר את שתי הנקודות. השחקנים משחקים בתורות עד שכל הקודקודים נצבעים בכחול. לאחר מכן, אילה מכוונת את כל הקטעים, כלומר כל קטע  $AB$  מחליפה בווקטור  $\overrightarrow{AB}$  או בווקטור  $\overrightarrow{BA}$ . אם אילה מצליחה לכוון את כל הקטעים כך שסכום הווקטורים שהתקבלו שווה ל-0 אז היא מנצחת, אחרת, ברווז מנצח.

15. לאילה וברווז חפיסת קלפים המורכבת מ-1024 קלפים, על כל קלף רשומה קבוצה של ספרות עשרוניות (0 עד 9) שונות כך שעל כל שני קלפים שונים רשומות קבוצות שונות (על אחד הקלפים לא רשום כלום). אילה וברווז משחקים במשחק הבא: כל אחד בתורו בוחר קלף אחד מהחפיסה ולוקח אותו. כאשר כל הקלפים חולקו כל אחד בודק האם הוא יכול לזרוק קלף אחד כך שכל ספרה תופיע על מספר זוגי של קלפים שלו. אם שחקן אחד יכול לעשות זאת והשני לא אז הוא המנצח, אחרת מוכרז תיקו.

א. הוכיחו כי לאילה יש אסטרטגיה מנצח.  
ב. עבור אילו מהלכים ראשונים של אילה עדיין תהיה לה אסטרטגיה מנצחת?