

## חזקות מודולו ראשוני

בתרגיל זה  $p$  מסמן תמיד מספר ראשוני.

1. הראו כי  $20^{p-2} + 5^{p-2} - 4^{p-2}$  מתחלק ב- $p$  בהינתן  $p > 5$ .
2. הראו כי  $(p-1)! + \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^4$  מתחלק ב- $p$  בהינתן  $p > 2$ .
3. מחלקים את  $18^{153}$  ב-103 עם שארית. מהי השארית?
4. הראו שלכל  $n$  טבעי קיימים 3 מספרים טבעיים  $a, b, c$  כך ש- $a^3 + b^3 + c^3 + n$  מתחלק ב- $p$ .
5. בשבר  $\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$  המונה  $a$  מתחלק ב- $p^2$  בהינתן  $p > 2$ .

---

שבר עשרוני של  $\frac{1}{p}$  עבור  $p > 5$  הוא שבר אינסופי מחזורי, והמחזור שלו הוא מספר קסום. למשל:

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857142857142857\dots$$

6. הראו שאורך המחזור הוא מחלק של  $p-1$ .
7. הראו שאם המחזור הוא באורך  $2k$ , ומפצלים אותו לשני קטעים באורך  $k$ , סכום שני החלקים הוא  $10^k - 1$ . כך למשל  $142 + 857 = 999$ .
8. הראו שאם המחזור הוא באורך  $m \cdot k$ , ומפצלים אותו ל- $m$  קטעים באורך  $k$ , סכום החלקים הוא כפולה של  $10^k - 1$ . כך למשל  $14 + 28 + 57 = 99$ .

**בתאבון!**