עוד בדיחה מפגרת

בתרגיל זה כל הפרות נקודתיות חסרות מסה בואקום

1. מצאו את כל המספרים הטבעיים n עבורם כל המספרים הקטנים וזרים ל-n יוצרים סדרה חשבונית.

2. עבור מספר טבעי n נגדיר את S_n להיות סכום השאריות של 2^n בחלוקה ב-$1,2,\dots,n$. הוכיחו כי לכל $n > 1000$ מתקיים ש-$S_n > 2n$. איך אפשר לשפר את החסם?

3. מספר יפה זה מספר מהצורה a^n עבור $a \in \{3,4,5,6\}$ ו-n טבעי. הוכיחו כי כל שלם גדול מ-2 הוא סכום של מספרים יפים שונים בזוגות.

4. הוכיחו שיש אינסוף זוגות של מספרים (m,n) שלמים חיוביים כך ש-$m|n!+1$ ו-$n \nmid m-1$.

5. נתונים x,y שלמים עבורם $2x^2-1=y^{15}$, ו-$x>1$. הוכיחו ש-x מתחלק ב-5.

6. מיכאל רשם בשורה את כל המספרים שאפשר להציג כסכום שני ריבועים שלמים. האם יש שני מספרים סמוכים בשורה בהפרש 2019?

7. נתון k אי-זוגי חיובי ו-n שלם. עבור a,b,c שלמים ידוע ש-

$$a^n+kb=b^n+kc=c^n+ka$$

הוכיחו ש-$a=b=c$.

8. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך ש:

א. המחלק המשותף המקסימלי של הסדרה $f(1), f(2), \dots$ הוא 1.

ב. עבור כל n גדול מספיק, מתקיים $f(n) \neq 1$ וגם:

$$f(a)^n | f(a+b)^{a^{n-1}} - f(b)^{a^{n-1}}$$

עבור כל a,b חיוביים.

9. נתון ראשוני p, עבור כל q ראשוני נסתכל על הסכום:

$$\sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor} x^{p-1}$$

הראו שעבור q גדול מספיק הסכום הנ"ל לא מתחלק ב-q.

10. נתון ראשוני p כך ש-$p^2|2^{p-1}-1$, ומספר שלם חיובי n. נגדיר:

$$f(x)=\frac{(x-1)^{p^n}-\left(x^{p^n}-1\right)}{p(x-1)}$$

מצאו את המספר הגדול ביותר N כך שישנם פולינומים g,h עם מקדמים שלמים ומספר שלם r כך ש:

$$f(x)=(x-r)^N g(x)+p\cdot h(x)$$

בתיאבון.