אין שאלות קשות, יש שאלות קלות

1. יהי n מספר טבעי. מצאו את המספר הקטן ביותר k בעל התכונה הבאה: לכל קבוצה סופית של ממשיים בקטע $[0,1]$ שסכומם n, ניתן לחלק את הקבוצה ל־k תתי קבוצות (אולי ריקות) כך שסכום האיברים בכל תת קבוצה לא עולה על 1.

2. לגמל יש לוח של $n+1$ משבצות מסודרות בשורה. בהתחלה יש לו n אבנים במשבצת השמאלית ביותר ואין אבנים בשאר המשבצות. בכל תור, הוא בוחר משבצת לא ריקה, עם k אבנים, בוחר אחת מהן ומזיז אותה לכל היותר k משבצות ימינה. גמל רוצה להעביר את כל ה־n אבנים למשבצת הימנית ביותר. הראו שזה יקח לו לפחות

$$\left\lceil\frac{n}{1}\right\rceil+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil+\ldots+\left\lceil\frac{n}{n}\right\rceil$$

תורות.

3. נתונה טבלה ריבועית שבכל משבצת שלה כתוב מספר. ידוע שבכל שורה של הטבלה סכום שני המספרים הגדולים ביותר הוא a, ובכל עמודה של הטבלה סכום שני המספרים הגדולים ביותר הוא b. הוכיחו כי $a=b$.

4. רצועת משבצות 1000000×1 מחולקת ל־100 קטעים (לאו דווקא באותו אורך). בכל משבצת כתוב מספר שלם וידוע שבמשבצות שעל אותו קטע רשומים אותם המספרים. שמו על כל אחת מהמשבצות כלי משחק, ואז הזיזו כל אחד מהכלים ימינה כמספר הכתוב על המשבצת עליה הוא עומד (אם זה מספר שלילי, הזיזו את הכלי שמאלה). נתון שאחרי הפעולה הזאת בכל משבצת היה שוב כלי אחד בדיוק. אחר כך חזרו על הפעולה שוב ושוב, ולכל כלי בקטע הראשון משמאל ספרו אחרי כמה פעמים הוא חזר לקטע זה לראשונה. הוכח כי בין מספרים אלו יש לכל היותר **100** מספרים שונים.

5. על גרף סופי מותרת הפעולה הבאה: בוחרים מעגל באורך **4** (אם קיים) ומוחקים ממנו צלע. עבור מספר שלם $n\geq 4$, מצאו את המספר המינימלי של צלעות בגרף שיכול להתקבל מביצוע חוזר של הפעולה הזו על הגרף המלא עם n קודקודים.

6. נתון מספר שלם $N\geq 2$. נבחרת של $N\left(N+1\right)$ שחקני כדורגל בגבהים שונים עומדים בשורה. המאמן גרנט רוצה להסיר $N\left(N-1\right)$ שחקנים מהשורה, כך שבשורה של $2N$ השחקנים הנותרים יתקיימו N התנאים הבאים:

1. אף אחד לא עומד בין שני השחקנים הכי גבוהים בשורה.
2. אף אחד לא עומד בין השחקנים השלישי והרביעי הכי גבוהים בשורה.
$\vdots$
N. אף אחד לא עומד בין שני השחקנים הכי נמוכים בשורה.

הוכיחו כי זה תמיד אפשרי.

7. נתונה קבוצה של $2n-1$ ממשיים חיוביים שסכומם S. הוכיחו כי יש לפחות $\binom{2n-2}{n-1}$ תתי קבוצות בגודל n שסכום איבריהן לפחות $\frac{S}{2}$.

8. להרמן יש n כרטיסים הממוספרים ב־$1,...,n$ והוא מסדר אותם בשורה בסדר כלשהו. זוג (a,b) נקרא הפרת סדר אם $a>b$ והכרטיס שממוספר ב־a מופיע משמאל לכרטיס שממוספר ב־b.
הרמן מבצע n שלבים באופן הבא: לכל $1\leq i\leq n$, בשלב ה־i, אם לכרטיס הממוספר ב־i יש k כרטיסים משמאלו, הוא יזיז אותו כך שיהיו לו k כרטיסים מימינו.
(דוגמא עבור $n=4$: $2,3,4,1 \to 2,4,3,1 \to 2,3,4,1 \to 3,4,1,2 \to 3,1,4,2,$)
הוכיחו כי לא משנה איך הרמן יסדר את הכרטיסים בהתחלה, לסידור הסופי יהיה אותו מפסר הפרות סדר כמו לסידור ההתחלתי.

9. לכל שני מספרים ממשיים שונים x,y נגדיר את $D(x,y)$ להיות השלם הייחודי d המקיים $2^d\leq|x-y|<2^{d+1}$. בהינתן קבוצת מספרים $\mathcal{F}$ ומספר $x\in\mathcal{F}$, נגדיר את המשקלים של x להיות כל הערכים של $D(x,y)$ עבור $y\in\mathcal{F}$ ו־$x\neq y$.
נתון שלכל $x\in\mathcal{F}$ יש לכל היותר k משקלים שונות (שיכולות להיות תלויות ב־x). מה הגודל המקסימלי של $\mathcal{F}$?